

FUNDAMENTOS DE INFORMÁTICA

ANNIBAL HETEM JUNIOR
coordenador

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

ÁLGEBRA LINEAR

PARA COMPUTAÇÃO

ISABEL CRISTINA DE OLIVEIRA NAVARRO ESPINOSA

LAURA MARIA DA CUNHA CANTO OLIVA BISCOLLA

PLINIO BARBIERI FILHO

LTC

CAPÍTULO 1. Matrizes, 1

- 1.1 Matrizes, 1
- 1.2 Operações com matrizes, 2
 - 1.2.1 Adição, 2
 - 1.2.2 Multiplicação por escalar ($n.º$ real), 3
 - 1.2.3 Multiplicação de matrizes, 4
- 1.3 Matriz inversível, 5
- 1.4 Determinantes, 9
 - 1.4.1 Menores e co-fatores, 11
 - 1.4.2 Desenvolvimento por Laplace, 12
 - 1.4.3 Matriz adjunta, 14

CAPÍTULO 2. Sistemas lineares, 19

- 2.1 Equações lineares, 19
- 2.2 Sistemas lineares, 19
- 2.3 Resolução de sistemas pela regra de Cramer, 21
- 2.4 Resolução de sistemas por escalonamento, 24

CAPÍTULO 3. Espaços vetoriais, 32

- 3.1 Definição, 32
- 3.2 Subespaço vetorial, 34
- 3.3 Soma de subespaços, 35
- 3.4 Intersecção de subespaços, 37
- 3.5 Soma direta, 40
- 3.6 Combinação linear, 40
- 3.7 Subespaço gerado, 41

CAPÍTULO 4. Base e dimensão, 44

- 4.1 Dependência e independência linear, 44
- 4.2 Base, 46
- 4.3 Base canônica, 47

CAPÍTULO 5. Transformações lineares, 54

- 5.1 Revisão de funções, 54
- 5.2 Transformação linear, 56
- 5.3 Núcleo e imagem de uma transformação linear, 61
 - 5.3.1 Núcleo, 61
 - 5.3.2 Imagem, 62
- 5.4 Operações com transformações lineares, 66

- 5.4.1 Adição, 66
- 5.4.2 Multiplicação por escalar, 66
- 5.4.3 Composição, 66
- 5.4.4 Propriedades, 67
- 5.5 Operadores inversíveis, 68

CAPÍTULO 6. Matriz de uma transformação linear, 70

- 6.1 Matriz de uma transformação linear, 70
- 6.2 Matriz mudança de base, 79

CAPÍTULO 7. Diagonalização, 83

- 7.1 Valores próprios e vetores próprios, 83
- 7.2 Diagonalização, 87

CAPÍTULO 8. Produto interno, 92

- 8.1 Produto interno, 82
- 8.2 Espaços vetoriais euclidianos, 94
- 8.3 Norma de um vetor, 94
- 8.4 Distância entre dois vetores, 96
- 8.5 Ângulo entre dois vetores, 96
- 8.6 Vetores ortogonais, 99
- 8.7 Conjunto ortogonal de vetores, 100
- 8.8 Base ortogonal, 101
- 8.9 Base ortonormal, 101
- 8.10 Coordenadas de um vetor numa base ortogonal, 102
- 8.11 Método de ortogonalização de Gram-Schmidt, 103
- 8.12 Conjuntos ortogonais, 105
- 8.13 Complemento ortogonal, 106
- 8.14 Exercícios resolvidos, 107

CAPÍTULO 9. Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, 112

- 9.1 Operadores lineares diferenciais com coeficientes constantes, 112
- 9.2 Álgebra dos operadores lineares, 114
- 9.3 Equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes, 117

Exercícios Propostos, 124

Apêndice 1 Transformações geométricas em três dimensões, 150

Apêndice 2 Noções de geometria analítica no plano, 183

Apêndice 3 Noções de geometria analítica no espaço, 217

Bibliografia, 284

Índice, 285

Matrizes

1.1 Matrizes

No nosso texto, usaremos como elementos de uma matriz somente números reais. A notação a_{ij} indica o elemento da matriz A que está na linha i e na coluna j . Assim, a matriz A tem como notação $A = (a_{ij})$, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ e podemos representar essa matriz

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou ainda,

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz representada tem m linhas e n colunas. Observe que a utilização de barras para indicar uma matriz não é conveniente, pois elas já são utilizadas para indicar o determinante da matriz, e esses dois conceitos são distintos: *matriz* é uma tabela de números reais, e o *determinante da matriz* é um número real.

A notação $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ indica o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$, isto é, matriz de números reais com m linhas e n colunas.

Se $m = n$, escrevemos $M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ou simplesmente $M_m(\mathbb{R})$ para indicar a matriz com m linhas e m colunas, que é chamada de *matriz quadrada de ordem m* . Quando $m \neq n$, dizemos que é uma *matriz retangular*.

Dizemos que A é uma *matriz linha* se $m = 1$, $A = (a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n})$.

Dizemos que A é uma *matriz coluna* se $n = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Chamamos A de **matriz identidade** se A for quadrada e $A = (a_{ij})$ com

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos a notação I_n para indicar a matriz identidade de ordem n .

Duas **matrizes** serão **iguais** se e somente se os seus elementos correspondentes forem iguais, isto é, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, temos que $A = B$

$$\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

1.2 Operações com matrizes

1.2.1 Adição

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $m \times n$, a matriz soma $A + B$ é dada por:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}}_{A+B}$$

Propriedades

A₁) associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

A₂) comutativa

$$A + B = B + A, \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

A₃) elemento neutro

$$\exists 0 \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ tal que } A + 0 = A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

A₄) oposto

$$\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \exists (-A) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ tal que } A + (-A) = 0.$$

A verificação dessas propriedades pode ser feita facilmente utilizando-se a definição de adição de matrizes. Note que a matriz elemento neutro 0 é a **matriz nula**, isto é,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determine $A + B$ e $A - B$.

Solução

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Multiplicação por escalar (n° real)

Dados uma matriz $A = (a_{ij})$, $m \times n$, e um número real α , temos

$$\alpha \cdot A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

a nova matriz $\alpha \cdot A$ é também uma matriz $m \times n$

Propriedades

$$M_1) (\alpha \cdot \beta) A = \alpha \cdot (\beta \cdot A), \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$M_2) (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$M_3) \alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$M_4) 1 \cdot A = A, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

EXEMPLO

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

determine: $A - 2C$; $\frac{1}{2}A$; $B + 2C - A$.

Solução

$$\begin{aligned} A - 2C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B + 2C - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-2 & 0-2-1 \\ -2-2+1 & -3+0-3 \\ 1+4-0 & 1+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

1.2.3 Multiplicação de matrizes

Sejam $A = (a_{ij})$ matriz $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ matriz $n \times p$, a matriz produto $A \cdot B$ ou simplesmente AB é a matriz $m \times p$, que tem como termo geral

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Isto é, devemos fazer o produto de cada linha da matriz A pelas colunas de B , obtendo assim as linhas da nova matriz.

Para deixar mais claro, vejamos um exemplo.

EXEMPLO

Dadas

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

verificamos que a matriz A é do tipo 3×2 e a matriz B é do tipo 2×3 e podemos então calcular os produtos AB e BA .

Solução

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -13 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos notar que, embora sejam possíveis os produtos AB e BA , eles não são iguais.

Geralmente isso acontece, isto é, a propriedade comutativa não vale para o produto de matrizes.

Propriedades

P_1) associativa

$$A(BC) = (AB)C, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n \times p}(\mathbb{R}) \text{ e } \forall C \in M_{p \times k}(\mathbb{R})$$

P_2) distributiva

$$A(B+C) = AB + AC, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$$

Analogamente, temos:

$$(A+B) \cdot C = AC + BC, \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$$

1.3 Matriz inversível

Uma matriz quadrada A é inversível se existir uma matriz B (também quadrada) tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$. A matriz B é chamada **matriz inversa** de A , e usamos a notação $B = A^{-1}$. A matriz A^{-1} é única.

EXEMPLO

Verifique se A é inversível.

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solução

Devemos procurar uma matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $A \cdot B = I$ e $B \cdot A = I$

então:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+3c & -b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{daí,} \quad \begin{cases} 2a+c=1 \\ -a+3c=0 \\ 2b+d=0 \\ -b+3d=1 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, temos

$$a = \frac{3}{7}; \quad b = \frac{-1}{7}; \quad c = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad d = \frac{2}{7}$$

Assim:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

logo,

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Tomemos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $A \cdot B = I$ e $B \cdot A = I$ então:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{daí,} \quad \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 6a + 3c = 0 \rightarrow c = -2a \\ 2b + d = 0 \\ 6b + 3d = 1 \end{cases}$$

substituindo na 1ª equação temos $2a - 2a = 1$, isto é, $0 = 1$ (F).

Concluimos então que o sistema não tem solução, logo não é possível determinar a matriz B e portanto a matriz A não é inversível. ■

Esse processo para determinação da matriz inversa é mais utilizado quando a matriz A é de ordem 2, porém quando a matriz A é de ordem maior ou igual a 3 o sistema a ser resolvido já não é tão simples: por exemplo, se a matriz for de ordem 3, o sistema a ser resolvido terá 9 equações e 9 variáveis, o que não é muito prático.

Para esses casos, utilizaremos um processo prático para a determinação da matriz inversa A^{-1} .

Para isso serão necessárias operações elementares de linha, isto é, operações que serão feitas com as linhas da matriz. Temos três operações possíveis:

- (1) permutação de linhas;

- (2) multiplicação de uma linha por um número real não-nulo;
- (3) substituição de uma linha por uma combinação linear dela com qualquer outra linha da matriz.

Notações:

- (1) $L_{1,2}$ indica permutação das linhas 1 e 2.
- (2) $3L_1$ indica multiplicação da linha 1 pelo número 3.
- (3) $L_2 = L_1 - 3L_2$ indica a substituição da linha 2 por uma combinação linear dela com a linha 1.

O processo prático consiste em reduzir a matriz $A_{n \times n}$ a uma matriz identidade $I_{n \times n}$ através de uma sequência de operações elementares de linha. Com essa mesma sequência de operações transforma-se a matriz identidade na matriz A^{-1} . Na prática, fazemos essas reduções de A para I e de I para A^{-1} ao mesmo tempo, como no exemplo a seguir.

Notemos que, se não for possível reduzir a matriz A à matriz identidade, temos que A não é inversível, isto é, A não admite inversa.

EXEMPLOS

1. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determine A^{-1} , pelo processo prático.

Solução

Inicialmente montemos uma nova matriz colocando ao lado de A a matriz identidade correspondente. As operações elementares devem ser feitas com as novas linhas da matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right)$$

$L_3 = L_3 + L_1$ $L_3 = L_3 - 7L_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 7/9 & -1/9 \end{array} \right) \sim$$

$L_1 = L_1 - 2L_2$ $L_3 = \frac{L_3}{-9}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 7/9 & -4/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 7/9 & -1/9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/9 & -4/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -5/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 7/9 & -1/9 \end{array} \right)$$

$L_1 = L_1 + 2L_3$ $L_2 = L_2 - 2L_3$ A^{-1}

transformamos assim A na matriz identidade e a matriz identidade na matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/9 & -4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -5/9 & 2/9 \\ -1/9 & 7/9 & -1/9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

determine A^{-1} , se existir.

Solução

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 = L_1 + L_2$$

Como a 2ª linha da metade esquerda da matriz é inteiramente nula, não será possível a redução dessa matriz à matriz identidade, logo A não é inversível.

3. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

foi usada para criptografar (codificar e decodificar) uma mensagem. As letras do alfabeto foram numeradas de acordo com a sequência:

A	1	N	14
B	2	O	15
C	3	P	16
D	4	Q	17
E	5	R	18
F	6	S	19
G	7	T	20
H	8	U	21
I	9	V	22
J	10	W	23
K	11	X	24
L	12	Y	25
M	13	Z	26

Suponha que somente você e a "central" possuam o segredo da criptografia, que é a matriz A , usada para codificar a mensagem. Para isso, as letras da mensagem que se quer enviar são

transformadas em uma sequência de números de acordo com a tabela anterior e agrupadas de 3 em 3, formando matrizes-colunas 3×1 .

Multiplicando-se a matriz A por essas matrizes-colunas, obtêm-se novas matrizes-colunas que se tornam codificadas. Para decodificar, usamos A^{-1} , a matriz inversa de A , que, multiplicada pela matriz-coluna codificada, gera a sequência numérica original, que será transformada usando-se a tabela dada anteriormente.

Por exemplo, se recebermos a seguinte mensagem da central:

44 22 21 74 43 14 25 14 7 92 35 53

qual o seu significado?

Calculando a matriz inversa, temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

e multiplicando as matrizes para decodificar teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 \\ 22 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ T \\ A \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 74 \\ 43 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 21 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} Q \\ U \\ E \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} D \\ I \\ A \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 92 \\ 35 \\ 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 26 \end{bmatrix} \begin{matrix} D \\ E \\ Z \end{matrix}$$

O significado é: ATAQUE DIA DEZ

Matrizes semelhantes

Dizemos que as matrizes A e B são semelhantes se existe uma matriz inversível P tal que:

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$$

1.4 Determinantes

Toda matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n tem associada a si um número real (ou escalar), a que chamaremos determinante de A . Temos várias maneiras para indicar esse número: $\det A$; $|A|$, ou ainda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Note que para indicar o determinante usaremos a notação de barras e não parênteses ou colchetes, como fazemos para as matrizes. A notação com barras não representa uma matriz.

Antes de dar uma definição para o determinante de A , $\det A$, analisaremos alguns casos.

a. Determinante de uma **matriz de ordem um**.

$$A = (a_{11}) \quad \det A = |a_{11}| = a_{11}$$

EXEMPLO

$$A = (2), \text{ então } \det A = 2.$$

b. Determinante de uma **matriz de ordem dois**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

EXEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7$$

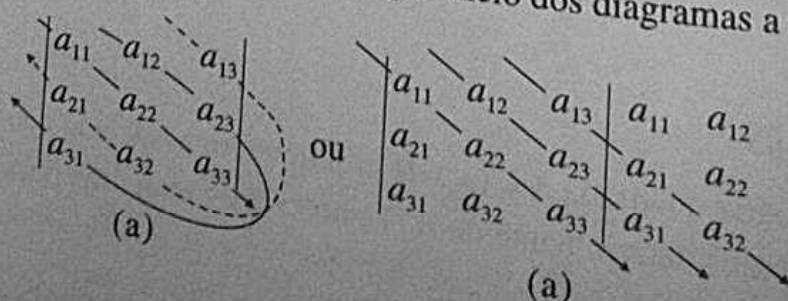
c. Determinante de uma **matriz de ordem três**.

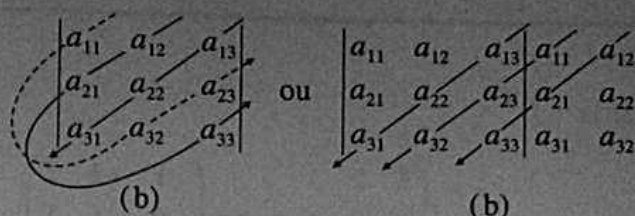
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Para facilitar, podemos representar o cálculo por meio dos diagramas a seguir:



**EXEMPLO**

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) + (-4) + (0) - [2 + 0 + 4] = 0$$

Observemos que no caso (a) os produtos são feitos conforme as setas, e mantém-se o sinal obtido; já no caso (b) os produtos são feitos conforme as setas, e os resultados têm seu sinal invertido.

Esse processo só serve para determinantes de matrizes de ordem 3.

Para definir $\det A$ para uma matriz de ordem qualquer precisaremos de mais alguns conceitos.

1.4.1 Menores e co-fatores

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada; chamamos de **menor** relativo ao elemento a_{ij} de A ao determinante $|N_{ij}|$, em que N_{ij} é a submatriz quadrada de ordem $n - 1$ de A que é obtida pela eliminação da linha i e da coluna j da matriz A .

Chamamos de **co-fator** de a_{ij} ao escalar A_{ij} dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |N_{ij}|$$

Os sinais $(-1)^{i+j}$ podem ser mais facilmente visualizados pela matriz

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Notemos que N_{ij} é uma matriz, enquanto A_{ij} é um escalar.

EXEMPLO

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule N_{13} , N_{22} , A_{12} , A_{22} .

Solução

Para calcular N_{13} devemos eliminar a 1ª linha e a 3ª coluna; assim, temos:

$$N_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular N_{22} , devemos eliminar a 2ª linha e a 2ª coluna; assim, temos:

$$N_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |N_{13}| = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |N_{22}| = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - (-2)) = 1 \cdot 3 = 3$$

Definição Seja $A = (a_{ij})$, então $\det A$ é a soma dos produtos obtidos pela multiplicação dos elementos da primeira linha por seus respectivos co-fatores. Assim:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j}$$

4.2 Desenvolvimento por Laplace

O $\det A$ pode ser expresso como uma expansão em co-fatores em relação a qualquer linha ou coluna de A . Assim:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

ou

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

No primeiro caso fixamos a linha i para fazer o desenvolvimento; já no segundo caso fixamos a coluna j para fazer o desenvolvimento.

EXEMPLO

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule o determinante de A , fazendo o desenvolvimento pela 1ª linha e depois pela 2ª coluna. A seguir compare os resultados obtidos.

Solução

Pela 1ª linha temos:

$$\det A = |A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Calculando os co-fatores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [0 \cdot 1 - 1 \cdot 1] = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1] = (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [(-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0] = 1 \cdot (-1) = -1$$

Daí,

$$|A| = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -1 + 6 - 3 = 2$$

Faremos agora o desenvolvimento pela 2ª coluna.

Pela 1ª linha temos:

$$\det A = |A| = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$$

Calculando os co-fatores temos:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [(-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2] = (-1) \cdot (-3) = 3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [1 \cdot 1 - 2 \cdot 3] = (1) \cdot (-5) = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3] = (-1) \cdot 4 = -4$$

Daí,

$$|A| = 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot (-4) = 6 + 0 - 4 = 2$$

Note que o resultado obtido com o desenvolvimento pela 1ª linha ou pela 2ª coluna é o mesmo. Assim, podemos fazer o desenvolvimento por qualquer linha ou coluna.

1.4.3 Matriz adjunta

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n , chamamos de matriz adjunta de A à transposta da matriz de co-fatores de A . Assim temos:

Matriz de co-fatores

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

Dada a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determine a matriz adjunta de A

Solução

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

pois os co-fatores de A são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [-3] = 1 \cdot (-3) = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [-6] = (-1) \cdot (-6) = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [-5] = 1 \cdot (-5) = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [1] = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [2] = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [1] = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [2] = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [2] = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [2] = 1 \cdot 2 = 2$$

Teorema Para toda matriz quadrada temos:

$$A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A| \cdot I, \text{ em que } I = \text{matriz identidade.}$$

Assim, se

$$|A| \neq 0$$

podemos obter a inversa de A pela expressão:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A)$$

EXEMPLO

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determine A^{-1} utilizando o teorema.

Solução

Calculando os co-fatores de A , temos a matriz dos co-fatores de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e a matriz

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-1) \cdot 1 = 2 + 1 = 3$$

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Propriedades

$P_1)$ Os determinantes de uma matriz A e de sua transposta são iguais, isto é, $|A| = |A^T|$.

EXEMPLO

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solução

Temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - [5 \cdot (-2)] = -3 - (-10) = -3 + 10 = 7$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - [(-2) \cdot 5] = -3 - (-10) = -3 + 10 = 7$$

Assim:

$$|A| = |A^T|$$

$P_2)$ Se uma matriz A tem uma linha (ou coluna) de zeros, então o seu determinante é igual a zero.

EXEMPLO

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solução

Temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 0 - 0 = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

$P_3)$ Se A tem 2 linhas (ou colunas) idênticas, então o seu determinante é nulo, isto é, $|A| = 0$.

EXEMPLO

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução

Temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 0$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = \\ = 4 - 2 + 0 + 2 - 0 - 4 = 0$$

$P_4)$ Se a matriz A é triangular, isto é, A tem zeros acima ou abaixo da diagonal principal, então o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Observação: Note que para a matriz identidade I temos $|I| = 1$.

EXEMPLO

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solução

Temos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 3$$

isto é, o determinante é igual ao produto dos termos 1 e 3 da diagonal principal. ■

$P_5)$ Se B é uma matriz obtida de uma matriz A por uma operação elementar de linha (ou coluna), temos:

- permutando-se 2 linhas (ou colunas) de A , então $|B| = -|A|$;
- multiplicando-se uma linha ou coluna de A por um escalar α , então $|B| = \alpha |A|$;
- somando-se a uma linha (ou coluna) um múltiplo de outra linha (ou coluna), então $|B| = |A|$.

EXEMPLO

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução

Temos então:

a. permutando as 2 primeiras colunas de A , obtemos a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e \quad |B| &= 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (3) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = \\ &= 0 + 3 + 2 - (-1) + 0 - 2 = -8 \\ |A| &= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = \\ &= -2 + 0 - 1 - 2 - 3 - 0 = -8 \end{aligned}$$

Daí,

$$|B| = |A|$$

b. multiplicando a 1ª linha de A por $\alpha = 2$, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e \quad |B| &= 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = \\ &= -4 - 2 - 4 - 6 = -16 \\ |A| &= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = \\ &= -2 + 0 - 1 - 2 - 3 - 0 = -8 \end{aligned}$$

Daí, $|B| = 2 \cdot |A|$ c. somando-se à linha 1 duas vezes a linha 2, temos $|B| = |A|$.

Assim

$$B = \begin{pmatrix} 1+(2) & 0+2 \cdot (-1) & (-1)+3 \cdot 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 3 \cdot (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= -6 - 12 + 5 + 10 + 4 - 9 = -8$$

$$|B| = 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 =$$

$$= -2 + 0 - 1 - 2 - 3 - 0 = -8.$$

Logo, $|B| = |A|$.

Sistemas lineares

2.1 Equações lineares

Uma **equação linear** é uma expressão do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, em que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (números reais) e $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis (incógnitas).

Os escalares a_i são chamados coeficientes, e b é chamado termo independente.

Uma solução para a equação será um conjunto ordenado de valores para as variáveis de modo que, substituídas na equação, a tornem verdadeira.

EXEMPLO

Dada a equação linear $2x + 3y - z = 2$, temos: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ coeficientes; $b = 2$, termo independente e x, y, z variáveis. Quando $x = -1$, $y = 1$ e $z = -1$ temos uma solução da equação pois

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ 2(-1) + 3(1) - (-1) &= 2 \\ -2 + 3 + 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Notemos que ainda não é possível afirmar se essa solução é única. ■

Representamos a solução de uma equação por uma n -upla ordenada $(k_1, k_2, \dots, k_n)$; assim, uma solução da equação dada nesse exemplo é a terna ordenada $(x, y, z) = (-1, 1, -1)$.

2.2 Sistemas lineares

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares. Assim, um sistema com m equações e n variáveis pode ser representado por:

$$S \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

sendo:

a_{ij} os coeficientes, com $i = 1, 2, 3, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$

x_j com $j = 1, 2, 3, \dots, n$ as variáveis;

b_i com $i = 1, 2, 3, \dots, m$ os termos independentes.

Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, diremos que o sistema S é um **sistema homogêneo**.

Uma solução do sistema linear S é uma n -upla ordenada de números reais, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, que é solução de cada uma das equações do sistema, isto é, substituindo-se os valores nas equações do sistema, obtemos m igualdades numéricas. Por exemplo: consideremos no sistema

$$S \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x \quad + 4z = 3 \end{cases}$$

a terna $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ é solução de S , pois quando substituirmos $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$ nas 3 equações que formam o sistema temos:

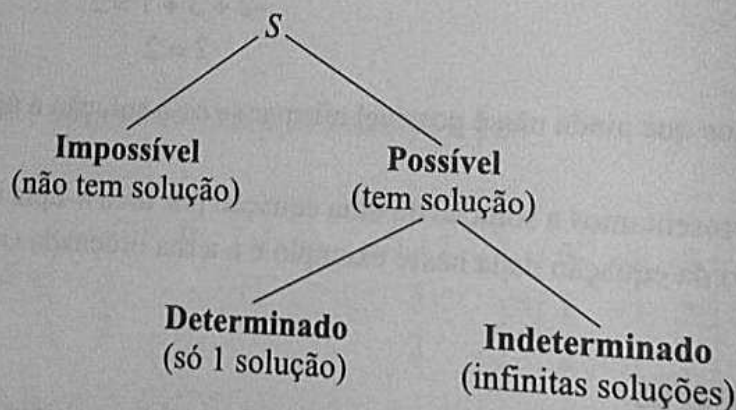
$$\begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (V) \\ 2(1) + 0 + 3 \cdot 0 = 2 & (V) \\ 3(1) \quad + 4 \cdot 0 = 3 & (V) \end{cases}$$

isto é, esses valores para x, y, z tornam verdadeiras as 3 equações.

Nem todos os sistemas lineares têm solução. Vejamos como podemos classificar um sistema quanto ao fato de ter ou não solução e, tendo solução, quanto ao número de soluções.

Se o sistema S não tem solução, dizemos que S é **impossível (SI)** (ou incompatível). Se o sistema tem solução, ele é **possível** (ou compatível); daí, se a solução for única, ele será um **sistema possível e determinado (SPD)**, mas, se tiver infinitas soluções, será um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Resumindo:



Também utilizamos os termos compatível (sistema possível) e incompatível (sistema impossível) para classificar um sistema.

Note que $(0, 0, \dots, 0)$ sempre é solução do sistema homogêneo; assim, todo sistema homogêneo é sempre possível. O que precisamos verificar é se além da solução $\{0\}$ trivial existem outras soluções.

EXEMPLOS

Resolva e classifique os sistemas lineares:

a. $S \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Solução

Resolvendo por adição, temos:

$$S \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \hline 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{array}$$

substituindo na 2ª equação, temos: $-x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Assim, S_1 é possível e determinado (SPD) e sua solução é $\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$

b. $S_2 \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$

Solução

Resolvendo por adição, temos:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \hline 0 = 1 \end{array} \quad (F)$$

como encontramos um resultado falso, concluímos que o sistema não tem solução. $\therefore$ SI.

c. $S_3 \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Solução

Resolvendo por adição, temos:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{r} \\ \\ \hline 0 = 0 \end{array} \quad (V)$$

encontramos um resultado sempre verdadeiro, e daí concluímos que as equações são equivalentes, pois $(E_1 = 2 \cdot E_2)$, assim temos somente uma equação no sistema e portanto ele é SPI. Para encontrar as soluções, escolhemos uma das equações e isolamos uma das variáveis. Pela 2ª equação, temos: $x = 1 - 2y$; assim, as soluções do sistema são da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - 2y\}$ ou de modo mais simples $\{(1 - 2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. ■

2.3 Resolução de sistemas pela regra de Cramer

Consideremos o sistema

$$S \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

Δ é o determinante da matriz $A = (a_{ij})$ dos coeficientes do sistema S ;
 Δ_i é o determinante da matriz obtida, substituindo a i -ésima coluna da matriz A pela coluna dos termos independentes.

Assim, temos:

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i, \text{ e se } \Delta \neq 0, \text{ podemos escrever } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

EXEMPLOS

a.
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

Solução

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-9) = 19$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 - (-3) = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (21) = -19$$

Como $\Delta \neq 0$, podemos escrever

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{e} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

daí a solução do sistema será

$$x = \frac{38}{19} = 2 \quad \text{e} \quad y = \frac{-19}{19} = -1$$

Sistema possível e determinado (SPD), e a solução é $(2, -1)$.

b.
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - [(-1) \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 3] = \\ &= -30 + 6 + 6 - [-5 - 8 - 27] = -18 - (-40) = -18 + 40 = 22 \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1)(-2) \cdot 8 - [(-1) \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 8 \cdot 3] = -15 - 6 + 16 - [5 - 4 - 72] = 66$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -48 + 2 - 3 + 8 + 4 + 9 = -22$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 24 - 6 - 5 + 32 + 9 = 44$$

Como $\Delta \neq 0$, podemos escrever

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

e

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

daí a solução do sistema será

$$x = \frac{66}{22} = 3, \quad y = \frac{-22}{22} = -1 \quad \text{e} \quad z = \frac{44}{22} = 2$$

Sistema possível e determinado (SPD) e a solução é (3, -1, 2).

$$\text{c. } \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 4 - 12 + 1 + 2 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 8 + 0 + 1 = -3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 - 8 + 6 - 2 + 0 = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 0 + 0 + 1 - 4 = -4$$

Como $\Delta = 0$, escrevemos: $\Delta \cdot x = \Delta_x$; $\Delta \cdot y = \Delta_y$ e $\Delta \cdot z = \Delta_z$, e como $0 \cdot x = -3$ não tem solução, temos que o sistema é impossível (SI).

d.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

Solução

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Como $\Delta = 0$, escrevemos: $\Delta \cdot x = \Delta_x$; $\Delta \cdot y = \Delta_y$ e $\Delta \cdot z = \Delta_z$, isto é,

$$0 \cdot x = 0; \forall x$$

$$0 \cdot y = 0; \forall y$$

$$0 \cdot z = 0; \forall z$$

O sistema é indeterminado (SPI).

Daí, temos que

$$x = \frac{1-3y}{2}$$

e a solução do sistema pode ser dada por

$$\left\{ (x, y) / x = \frac{1-3y}{2} \right\}$$

ou

$$\left\{ \left(\frac{1-3y}{2}, y \right) \in \mathbb{R} \right\}$$

2.4 Resolução de sistemas por escalonamento

Operações Elementares (com as equações do sistema)
Temos apenas três operações possíveis:

- permutação de equações;

- multiplicação de uma equação por um número real **não-nulo**;
- substituição de uma equação por uma combinação linear dela com qualquer uma das outras equações do sistema.

Observemos que essas operações elementares são as mesmas utilizadas no processo prático para a determinação da matriz inversa.

Podemos, por essas operações, transformar o sistema dado S em um sistema equivalente S_1 . Sistemas equivalentes têm, quanto às suas soluções, o mesmo comportamento, isto é, se conseguirmos transformar S num sistema mais simples S_1 , e determinamos a solução para S_1 , essa também será a solução de S . Se S_1 não tem solução, então S também não tem solução. Para resolver por escalonamento um sistema S , devemos utilizar as operações elementares transformando S num sistema do tipo:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_{n-1} + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

ou simplesmente

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \quad \quad \quad a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad a_{33} \cdot x_3 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \ddots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Esse sistema é chamado de **sistema escalonado**.

Observamos num sistema escalonado que o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da 2ª, é maior que o da anterior.

Na resolução de sistemas lineares, podemos também utilizar a notação de matriz. Assim, se

$$S \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matriz dos coeficientes de S e

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

matriz completa de S (ou matriz do sistema).

As mesmas operações elementares utilizadas nos sistemas podem ser usadas nas linhas da matriz e também transformam a matriz dada numa matriz equivalente.

Se aplicamos as operações elementares às linhas da matriz B , isso corresponde a aplicar as mesmas operações às equações do sistema S (somente prescindindo das incógnitas). Assim, para resolver por escalonamento um sistema, podemos utilizar também a notação de matriz e após ter escalonado a matriz retomamos a notação de sistema e determinamos a sua solução.

EXEMPLOS

Resolva por escalonamento os sistemas

$$\text{a. } S \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases} &\sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -y - z = 0 \end{cases} \\ &E_2 = E_2 - E_1 \qquad E_3 = E_3 - 2E_1 \\ &\sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + z = -1 \\ -y - z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + z = -1 \\ -2z = 1 \rightarrow z = \frac{-1}{2} \end{cases} \\ &E_2 = \frac{E_2}{2} \qquad E_3 = E_3 - E_2 \end{aligned}$$

Substituindo na 2ª equação, temos:

$$-y - \frac{1}{2} = -1 \quad \boxed{y = \frac{1}{2}} \quad \text{e daí,}$$

substituindo na 1ª equação, temos:

$$x + \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = 1 \quad \boxed{x = 0} \quad \text{e daí,}$$

o sistema é possível e determinado (SPD), e a solução única é $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

Refazendo: Agora utilizando a notação de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & -2 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & -2 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$L_2 = L_2 - L_1 \quad L_3 = L_3 - 2L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \frac{L_2}{2} \quad L_3 = L_3 - L_2$$

retomando a notação de sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = -2 \\ -2z = 1 \end{cases}$$

e daí

$$z = \frac{-1}{2}; \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = 0$$

$$\text{b. } S \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Solução

Notemos que o escalonamento utilizado no exemplo anterior pode continuar até que reste somente a diagonal principal, como veremos a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 2z = -1 \\ -y - 5z = -1 \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 - E_1 \quad E_3 = E_3 - 2E_1$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 2z = -1 \\ 13z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + z = 2 \\ -3y - 2z = -1 \\ 13z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} 39x = 24 \\ -3y - 2z = -1 \\ 13z = 2 \end{cases}$$

$$E_3 = -3E_3 + E_2 \quad E_1 = 3E_1 - E_2 \quad E_1 = 3E_1 - E_3$$

$$\sim \begin{cases} 39x & = 24 \\ -39y & = -9 \\ 13z & = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{8}{13} \\ y = \frac{3}{13} \\ z = \frac{2}{13} \end{cases}$$

$$E_2 = 13E_2 + 2E_3$$

$$E_1 = \frac{E_1}{39}; E_2 = \frac{E_2}{-39}; E_3 = \frac{E_3}{13}$$

Podemos também utilizar a notação de matriz, como a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$L_2 = L_2 - L_1 \quad L_3 = L_3 - 2L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 13 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 13 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 & | & 24 \\ 0 & -3 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 13 & | & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$L_3 = -3L_3 + L_2 \quad L_1 = -3L_1 + L_2 \quad L_1 = 13L_1 + L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 & | & 24 \\ 0 & -39 & 0 & | & -9 \\ 0 & 0 & 13 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{8}{13} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = 13L_2 + 2L_3$$

$$L_1 = \frac{L_1}{39}; L_2 = \frac{L_2}{-39}; L_3 = \frac{L_3}{13}$$

$$\text{e daí, } \begin{cases} x = \frac{8}{13} \\ y = \frac{3}{13} \\ z = \frac{2}{13} \end{cases}$$

$$\text{c. } S \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 1 \\ -4y + 5z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 1 \\ 0 = 1 \quad (\text{F}) \end{cases}$$

$$E_2 = E_2 - 2E_1 \quad E_3 = E_3 - 3E_1 \quad E_3 = E_3 - E_2$$

Como a 3ª equação não pode ser verificada, o sistema não tem solução. $\therefore$ o sistema é impossível (SI).

$$d. S \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -x + y - 3z = 2 \\ 2x + y + 4z = -3 \end{cases}$$

Solução

Resolveremos esse sistema utilizando a notação de matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_2 = L_2 + L_1 \qquad L_3 = L_3 - 2L_1 \qquad L_3 = L_3 + L_2$$

Retomando a notação de sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3y - 2z = 1 \\ 0 = 0 \quad (V) \end{cases}$$

como a 3ª equação é sempre verdadeira, o sistema será possível e indeterminado (SPI). Para encontrar a solução de S , determinamos y na 2ª equação

$$y = \frac{1+2z}{3}$$

e substituindo na 1ª equação vem:

$$x + 2\left(\frac{1+2z}{3}\right) + z = -1$$

e daí

$$x = \frac{-5-7z}{3}$$

$\therefore$ o conjunto solução do sistema é

$$\left\{ \left(\frac{-5-7z}{3}, \frac{1+2z}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$e. S \begin{cases} 3x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 1 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + y - 2z + t = 0 \\ y + 7z - 8t = 3 \end{cases}$$

$$E_2 = 3E_2 - 2E_1$$

O sistema já está escalonado.

Temos, então, $y = 3 - 7z + 8t$, e substituindo na 1ª equação temos:

$$x = \frac{-3+9z-9t}{3}$$

e temos SPI.

$$f. S \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x + y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$$

Solução

Tomando a matriz do sistema, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = 2L_2 - L_1 \quad L_3 = 2L_3 + 3L_1 \quad L_3 = 3L_3 + 5L_2$$

retomando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 6y = 0 \\ 0 = 0 \quad (V) \end{cases}$$

e daí, $x = 0$; $y = 0$ e temos SPD com solução única $(0, 0)$.

$$g. S \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Solução

Tomando a matriz do sistema, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$L_2 = L_2 - 2L_1 \quad L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ daí, } \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ -11y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \quad (V) \end{cases}$$

$$L_3 = L_3 - L_2$$

$y = \frac{-3z}{11}; \quad x = \frac{4z}{11}$

$$\therefore x = \frac{4z}{11}, \quad y = \frac{-3z}{11} \text{ e } z \text{ é qualquer } \left\{ \left(\frac{4z}{11}, \frac{-3z}{11}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos: SPI e a solução de S é dada pelo conjunto

$$\left\{ \left(\frac{4z}{11}, \frac{-3z}{11}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$



Espaços vetoriais

3.1 Definição

Um conjunto V é um **espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$** se e somente se existem em V duas operações — uma adição e uma multiplicação por escalar (número real) — que satisfazem as seguintes propriedades:

$$+: V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

A_1) associativa

$$(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$$

A_2) comutativa

$$u + v = v + u, \forall u, v \in V$$

A_3) elemento neutro

$$\exists 0 \in V \text{ tal que } u + 0 = u, \forall u \in V$$

A_4) oposto

$$\forall u \in V, \exists -u \in V \text{ tal que}$$

$$u + (-u) = 0$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u$$

$$M_1) \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$$

$$M_2) \forall u \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$

$$M_3) \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

$$M_4) \forall u \in V$$

$$1 \cdot u = u$$

Os elementos de V são chamados vetores, e os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados escalares.

Essa definição vale também para o caso de os escalares serem números complexos. Neste texto, entretanto, só utilizaremos escalares reais, isto é, V é um $\mathbb{R}$ espaço vetorial.

EXEMPLOS

1. $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial

É notório que os números reais satisfazem as propriedades anteriores.

2. $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial

Sendo $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, conjunto dos pares ordenados que formam o plano; com as operações definidas por:

$$u + v = (x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$$

$$\alpha \cdot u = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Verifiquemos as oito condições da definição:

$$A_1) (u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{sejam } u = (x, y), v = (r, s) \text{ e } w = (p, q)$$

$$(u + v) + w = [(x, y) + (r, s)] + (p, q) = (x + r + p, y + s + q)$$

$$= ((x+r)+p, (y+s)+q) = (x+(r+p), y+(s+q)) = (x, y) + [(r+p), (s+q)] = \\ = (x, y) + [(r, s) + (p, q)] = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$A_2) \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x, y) + (r, s) = (x+r, y+s) = (r+x, s+y) = (r, s) + (x, y) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$A_3) \exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \Leftrightarrow (x, y) + (r, s) = (x, y) \Leftrightarrow (x+r, y+s) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+r = x \\ y+s = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ s = 0 \end{cases}$$

logo, $\mathbf{0} = (0, 0)$ é o elemento neutro da adição

$$A_4) \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \exists -\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y) + (r, s) = (0, 0) \Leftrightarrow (x+r, y+s) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+r = 0 \\ y+s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -x \\ s = -y \end{cases}$$

logo, $-\mathbf{u} = (-x, -y)$ é o oposto de $\mathbf{u} = (x, y)$

$$M_1) \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha(\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$$

$$\alpha(\beta \cdot \mathbf{u}) = \alpha(\beta \cdot (x, y)) = \alpha \cdot ((\beta x, \beta y)) = (\alpha\beta x, \alpha\beta y) = (\alpha\beta) \cdot (x, y) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$$

$$M_2) \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = (\alpha + \beta) \cdot (x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) =$$

$$= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) = (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) =$$

$$= \alpha(x, y) + \beta(x, y) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$$

$$M_3) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot ((x, y) + (r, s)) =$$

$$\alpha \cdot (x+r, y+s) = (\alpha(x+r), \alpha(y+s)) =$$

$$= (\alpha x + \alpha r, \alpha y + \alpha s) = (\alpha x, \alpha y) + (\alpha r, \alpha s) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$$

$$M_4) \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{1} \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = \mathbf{u}$$

3. Sendo $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ conjunto dos pontos do plano, temos que $\mathbb{R}^3$ é espaço vetorial. (A demonstração pode ser feita de modo análogo ao do Exemplo 2.) Da mesma forma, temos:

$\mathbb{R}^4$ é espaço vetorial

⋮

$\mathbb{R}^n$ é espaço vetorial, sendo

$$\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Em todos esses conjuntos, definimos a adição e a multiplicação por escalar de modo análogo ao que foi definido no exemplo anterior. A verificação da definição de espaço vetorial nesses casos pode ser feita do mesmo modo que foi feito no exemplo anterior.

4. Como já foi visto no Capítulo 1, o conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ satisfaz as condições da definição de espaço vetorial. Assim, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é espaço vetorial. ■

Propriedades

$$P_1) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 P_2) \quad & \forall \mathbf{u} \in V, 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \\
 P_3) \quad & \alpha \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \mathbf{u} = \mathbf{0} \\
 P_4) \quad & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, (-\alpha) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot (-\mathbf{u}) = -(\alpha \cdot \mathbf{u}) \\
 P_5) \quad & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} - \beta \cdot \mathbf{u} \\
 P_6) \quad & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} - \alpha \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

3.2 Subespaço vetorial

Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V , ($S \subset V$), S é um **subespaço de V** se e somente se S com as operações de adição e multiplicação por escalar de V for um espaço vetorial.

Para facilitar essa verificação, temos o seguinte resultado:

$$\text{Teorema } S \text{ é subespaço de } V \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & S \neq \emptyset \\ (2) & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S, \text{ temos } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S \\ (3) & \forall \mathbf{u} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ temos } \alpha \cdot \mathbf{u} \in S \end{cases}$$

Admitiremos esse resultado sem a sua demonstração, por não ser de interesse para este texto. Notemos que se S é subespaço (e portanto espaço vetorial), então S tem elemento neutro da adição. Assim, a condição (1) do teorema pode ser substituída por $0 \in S$, e reescrevendo o teorema temos:

$$S \text{ é subespaço de } V \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & 0 \in S \\ (2) & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S, \text{ temos } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S \\ (3) & \forall \mathbf{u} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ temos } \alpha \cdot \mathbf{u} \in S \end{cases}$$

EXEMPLOS

1. Para todo espaço vetorial V temos que $S = V$ e $S = \{0\}$ são subespaços de V e são chamados de subespaços triviais.

$$S = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \text{ é subespaço do } \mathbb{R}^3$$

De fato,

(a) $0 = (0, 0, 0) \in S$ (pois a 1ª coordenada é nula)

(b) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, temos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} \in S \Rightarrow \mathbf{u} = (0, y, z) \\ \mathbf{v} \in S \Rightarrow \mathbf{v} = (0, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, y, z) + (0, b, c) = (0, y + b, z + c) \in S$$

(c) $\forall \mathbf{u} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos $\alpha \cdot \mathbf{u} \in S$

$$\mathbf{u} \in S \Rightarrow \mathbf{u} = (0, y, z)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot (0, y, z) = (0, \alpha y, \alpha z) \in S$$

2. $S = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2\}$ não é subespaço do $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 0) \notin S$ (a 1ª coordenada do vetor não é igual a 1).

3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$ é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$

$M_2(\mathbb{R})$ – conjunto das matrizes quadradas, de números reais, de ordem 2.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$(b) \forall A, B \in S, A + B \in S$$

$$\left. \begin{array}{l} A \in S \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ B \in S \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+q \\ c+r & 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$(c) \forall A \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot A \in S$$

$$A \in S \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & 0 \end{pmatrix} \in S$$

3.3 Soma de subespaços

Dados R, S subespaços de V , temos:

$$R + S = \{u \in V \mid u = r + s \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S\}$$

Teorema Se R e S são subespaços de V , então $R + S$ também é subespaço de V .

Demonstração: Se R e S são subespaços, temos:

$$(1) 0 \in R + S, \text{ pois } 0 \in R \text{ e } 0 \in S \text{ e daí } 0 + 0 = 0$$

$$(2) \forall u, v \in R + S, u + v \in R + S$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in R + S \Rightarrow u = r + s, \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S \\ v \in R + S \Rightarrow v = p + q, \text{ com } p \in R \text{ e } q \in S \end{array} \right\} \Rightarrow u + v = (r + s) + (p + q) = (r + p) + (s + q)$$

$$\therefore u + v \in R + S$$

$$(3) \forall u \in R + S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot u \in R + S$$

$$u \in R + S \Rightarrow u = r + s \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S$$

$$\alpha u = \alpha \cdot (r + s) = \underbrace{\alpha \cdot r}_{\in R} + \underbrace{\alpha \cdot s}_{\in S} \in R + S$$

Logo, de (1), (2) e (3) temos que $R + S$ é subespaço de V .

EXEMPLOS

1. Sendo R e S subespaços dados por:

$$R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\} \text{ e } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ e } z = 0\}, \text{ determinar } R + S.$$

Solução

Como $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \text{ e } z=0\}$, podemos escrever $S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$, e daí teremos

$$R + S = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = r + s \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S\}$$

$$\left. \begin{array}{l} r \in R \Rightarrow u = (x, 0, 0) \\ s \in S \Rightarrow v = (0, y, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow u = r + s = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0)$$

$$\therefore R + S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$$

Podemos representar geometricamente esta soma

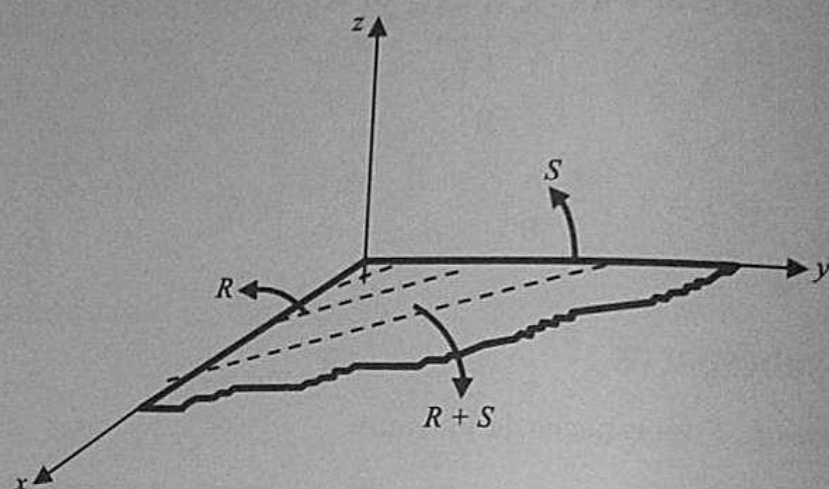


Figura 3.1

2. Sendo $R = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e $S = \{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3\}$, determine $R + S$.

Solução

$$R + S = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = r + s \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S\}$$

$$\left. \begin{array}{l} r \in R \Rightarrow u = (x, 0, z) \\ s \in S \Rightarrow v = (a, b, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow u = r + s = (x, 0, z) + (a, b, 0) = (x + a, b, z)$$

$$\therefore R + S = \{(x + a, b, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

3. Sendo S e T subespaços dados por:

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} \text{ e } T = \{(x, 0, 2z) \in \mathbb{R}^3\}, \text{ determine } S + T.$$

Solução

Inicialmente, é conveniente a substituição das letras repetidas nos 2 vetores para evitar conclusões erradas. Assim, $T = \{(a, 0, 2b) \in \mathbb{R}^3\}$. Temos que:

$$S + T = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = s + t \text{ com } s \in S \text{ e } t \in T\},$$

$$\left. \begin{array}{l} s \in S \Rightarrow s = (x, y, 0) \\ t \in T \Rightarrow t = (a, 0, 2b) \end{array} \right\} \Rightarrow u = s + t = (x, y, 0) + (a, 0, 2b) = (x + a, y, 2b)$$

$$\therefore S + T = \{(x + a, y, 2b) \in \mathbb{R}^3\}$$

4. Sendo S e T subespaços definidos por:

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - w = 0\} \text{ e}$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -y \text{ e } z - w = 0\}$$

determine $S + T$.

Solução

Reescrevendo os subespaços S e T utilizando as condições dadas, temos em S :

$$x + 2y - w = 0, \text{ isto é, } x = -2y + w \text{ ou}$$

$$y = \frac{-x + w}{2}, \text{ ou ainda, } w = x + 2y.$$

Escolheremos uma dessas condições, por exemplo $x = -2y + w$, e substituiremos no vetor de S , assim:

$$S = \{(-2y + w, y, z, w) \in \mathbb{R}^4\}$$

em T :

$$x = -y \text{ e } z - w = 0, \text{ isto é, } x = -y \text{ e } z = w. \text{ Substituindo no vetor de } T, \text{ temos}$$

$$T = \{(-y, y, w, w) \in \mathbb{R}^4\}.$$

Como as letras y e w são comuns aos vetores s e t , é conveniente a sua substituição. Podemos então escrever:

$$t = (-a, a, b, b).$$

Assim:

$$S + T = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u = s + t \text{ com } s \in S \text{ e } t \in T\}$$

$$\begin{aligned} s \in S \Rightarrow s = (-2y + w, y, z, w) \\ t \in T \Rightarrow t = (-a, a, b, b) \end{aligned} \left\} \Rightarrow u = s + t = (-2y + w, y, z, w) + (-a, a, b, b) = \right.$$

$$= (-2y + w - a, y + a, z + b, w + b)$$

$$\therefore S + T = \{(-2y + w - a, y + a, z + b, w + b) \in \mathbb{R}^4\}$$

Observe que poderíamos ter escolhido $w = x + 2y$ para substituir em S e daí

$$S = \{(x, y, z, x + 2y) \in \mathbb{R}^4\}$$

e a resolução do exercício é a mesma. ■

3.4 Intersecção de subespaços

Dados R, S subespaços de V , temos:

$$R \cap S = \{u \in V \mid u \in R \text{ e } u \in S\}$$

Teorema Se R e S são subespaços de V , então

$$R \cap S$$

também é subespaço de V .

Demonstração: Se R e S são subespaços, temos:

$$(1) \ 0 \in R \cap S, \text{ pois } 0 \in R \text{ e } 0 \in S$$

$$(2) \ \forall u, v \in R \cap S, u+v \in R \cap S$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in R \cap S \Rightarrow \begin{cases} u \in R \\ u \in S \end{cases} \\ v \in R \cap S \Rightarrow \begin{cases} v \in R \\ v \in S \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u+v \in R \\ u+v \in S \end{array} \Rightarrow u+v \in R \cap S$$

$$(3) \ \forall u \in R \cap S, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot u \in R \cap S$$

$$u \in R \cap S \Rightarrow \begin{cases} u \in R \Rightarrow \alpha \cdot u \in R \\ u \in S \Rightarrow \alpha \cdot u \in S \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot u \in R \cap S$$

Logo, de (1), (2) e (3) temos que $R \cap S$ é subespaço de V .

Observação

$$a) \ R \cap \{0\} = \{0\}$$

$$b) \ R \cap S \subset R \text{ e } R \cap S \subset S$$

EXEMPLOS

1. Sendo $R = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $S = \{(0, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$, determine

$$R \cap S$$

Solução

$$R \cap S = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \in R \text{ e } u \in S\}$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in R \Rightarrow u = (x, y, 0) \\ u \in S \Rightarrow u = (0, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, 0) = (0, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = b \\ 0 = c \end{cases}$$

$$\therefore R \cap S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$$

Note que também poderíamos dar a solução

$$R \cap S = \{(0, b, 0) \in \mathbb{R}^3\}$$

2. Sendo

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\} \text{ e } S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$$

subespaços de $M_2(\mathbb{R})$, determine

Solução

$$R \cap S = \{u \in M_2(\mathbb{R}) \mid u \in R \text{ e } u \in S\}$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in R \Rightarrow u = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ u \in S \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 0 = c \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{SPD}$$

$$\therefore R \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Observe que o sistema que deve ser resolvido na intersecção é sempre possível, podendo ser SPD e daí $R \cap S = \{0\}$, ou SPI, e daí $R \cap S$ tem infinitas soluções.

3. Sendo $S = \{(x, y, 2x) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(z + y, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$, determine $S \cap T$.

Solução

Podemos igualar os vetores de S e T com as letras que foram dadas no enunciado, porém nem sempre é prático resolver o sistema com letras repetidas.

Substituiremos as letras dos vetores de S , assim

$$\left. \begin{array}{l} s \in S \Rightarrow u = (x, y, 2x) \\ t \in T \Rightarrow v = (b + c, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, 2x) = (b + c, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x = b + c \\ y = b \\ 2x = c \end{cases}$$

resolvendo o sistema, temos: $x = y + 2x$, isto é, $y = -x$

$$\therefore S \cap T = \{(x, -x, 2x) \in \mathbb{R}^3\}$$

Note que, se resolvemos o sistema em função de b e c , temos: $c = -2b$ e daí a solução

$$S \cap T = \{(-b, b, -2b) \in \mathbb{R}^3\}$$

(equivalente ao resultado anterior).

4. Sendo R e S subespaços definidos por

$$R = \{(y - 2z, y, 3z) \in \mathbb{R}^3\} \text{ e } S = \{(x, 2x + z, x - z) \in \mathbb{R}^3\} \text{ determine } R \cap S.$$

Solução

Substituindo as letras de S temos:

$$S = \{(a, 2a + b, a - b) \in \mathbb{R}^3\}, \text{ igualando os vetores de } R \text{ e de } S \text{ vem:}$$

$$(y - 2z, y, 3z) = (a, 2a + b, a - b) \Rightarrow \begin{cases} y - 2z = a \\ y = 2a + b \\ 3z = a - b \end{cases}$$

da 1ª e 2ª equações temos: $z = \frac{a + b}{2}$ e $y = 2a + b$; substituindo na 3ª equação do sistema, temos:

$$a = -5b.$$

$$\therefore R \cap S = \{(-5b, -9b, -6b) \in \mathbb{R}^3\}$$

5. Sendo $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$, determine $U \cap V$.

Solução

Podemos resolver este exercício como o anterior ou então comparando as condições. Resolveremos comparando as condições. Teremos assim duas formas diferentes de resolução para exercícios desse tipo.

Igualando as condições, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x$$

substituindo na 1ª equação, temos: $x + 2(-2x) - z = 0 \Rightarrow x - 4x - z = 0 \Rightarrow z = -3x$ e $y = -2x$.
Assim, $U \cap V = \{(x, -2x, -3x) \in \mathbb{R}^3\}$. ■

3.5 Soma direta

Se R e S são subespaços de V , dizemos que V é soma direta de R e S se e somente se

$$\begin{cases} (a) V = R + S \\ (b) R \cap S = \{0\} \end{cases}$$

Notação:

$$V = R \oplus S$$

lê-se: V é soma direta de R e S .

EXEMPLOS

1. Sendo $R = \{(a, 0, c) \in \mathbb{R}^3\}$ e $S = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$, verificamos que:

(a) $R + S = \{(a, y, c + z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3$

(b) $R \cap S = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\} \neq \{(0, 0, 0)\}$

logo $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de R e S .

2. Sendo $R = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e $S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$, verificamos que:

(a) $R + S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3$

(b) $R \cap S = \{(0, 0, 0)\}$

logo $\mathbb{R}^3 = R \oplus S$ (é soma direta).

3. Sendo $R = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$, verificamos que:

(a) $R + S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\} \neq \mathbb{R}^3$, pois, por exemplo, $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, mas $(0, 0, 1) \notin R + S$

(b) $R \cap S = \{(0, 0, 0)\}$

logo como $R + S \neq \mathbb{R}^3$ não podemos falar em soma direta. ■

3.6 Combinação linear

Seja V um espaço vetorial. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$$

denominamos o vetor v ,

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, uma **combinação linear (CL)** dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ como **coeficientes**.

EXEMPLOS

1. a. $n = 1$: $u \in V, \alpha \in \mathbb{R}$; αu é uma CL de u
 b. $n = 2$: $u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$ é uma CL de u e v , com coeficientes α, β .
 c. $n = 3$: $u, v, w \in V, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w$ é uma CL de u, v, w , com coeficientes α, β, γ .
 d. $n = 4$: ... você completa!
 E assim por diante.

2. Sendo $V = \mathbb{R}^2$, escreva o vetor $w = (7, 2)$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 2)$ e $v = (1, -1)$.

Do Exemplo 1(b) temos:

$$(1) \cdot w = \alpha u + \beta v \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}). \text{ Devemos calcular } \alpha \text{ e } \beta.$$

Escrevendo em coordenadas, vem:

$$(7, 2) = \alpha (1, 2) + \beta (1, -1).$$

Realizando as operações e igualando as correspondentes coordenadas, obtemos:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 \quad \text{e} \quad \beta = 4$$

Substituindo em (1), vem: $w = 3u + 4v$

6.7 Subespaço gerado

Seja $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ subconjunto finito de um espaço vetorial V . Usaremos a notação $[M]$ para indicar o conjunto formado por todas as combinações lineares dos vetores de M .

Assim,

$$[M] = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Pode-se verificar facilmente que $[M]$ é um subespaço de V . Esse subespaço é chamado de **subespaço gerado** por M . Os elementos de M geram $[M]$ ou são geradores ou ainda formam um sistema de geradores de $[M]$.

Como M é finito, os espaços serão finitamente gerados. No caso de sistemas de geradores infinitos, os resultados poderão ser diferentes.

Observação: Se R e S são subespaços de V tais que $R = [B_1]$ e $S = [B_2]$, então $R + S = [B_1 \cup B_2]$.

Convenção:

Se $M = \emptyset$, temos $[M] = [\emptyset] = \{0\}$

Propriedades

Sendo V um espaço vetorial e

$$M \subset V$$

temos

- (1) $M \subset [M]$
- (2) $N \subset M \Rightarrow [N] \subset [M]$
- (3) $M, N \subset V \Rightarrow [M \cup N] = [M] + [N]$

EXEMPLOS

1. Sendo $M = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0)\} \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0)\} = \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (\alpha, \alpha(-1), 0) + (0, \beta, 0)\} = \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (\alpha \cdot 1, \alpha(-1) + \beta, 0)\} = \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = (\alpha \cdot 1, -\alpha + \beta, 0)\}
 \end{aligned}$$

ou, mais simplesmente, $[M] = \{(\alpha, -\alpha + \beta, 0) \in \mathbb{R}^3\}$

2. Sendo

$$M = \{(2, 0, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ temos:}$$

$$[M] = \{(2\alpha, \beta, \alpha - \beta + \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

3. Determine um sistema de geradores de U , subespaço do $\mathbb{R}^2$, definido por:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}.$$

Escrevemos U com a relação entre as coordenadas:

$$y = 2x \text{ ou } x = \frac{y}{2} \text{ no próprio vetor, assim:}$$

$$U = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

ou

$$U = \{(\frac{y}{2}, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

Se escolhemos (1), vem: $(x, 2x) = x(1, 2)$, daí $(x, 2x)$ é uma combinação linear de $(1, 2)$.Um sistema de geradores de U é $\{(1, 2)\}$. Podemos também escrever $U = [(1, 2)]$.

Se escolhemos (2), vem:

$$\left(\frac{y}{2}, y\right) = y\left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ daí } \left(\frac{y}{2}, y\right) \text{ é combinação linear de } \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Podemos também escrever $U = \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right]$.

Observe que este problema admite mais de uma solução; por isso, no seu enunciado foi escrito: "determinar um sistema gerador ..." e não "determine o sistema gerador ..."

4. Dados $S = \{(2x, x - z, z, x + 4z) \in \mathbb{R}^4\}$ subespaço do $\mathbb{R}^4$, podemos determinar um sistema de geradores de S .

Tomemos o vetor $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{u} = (2x, x - z, z, x + 4z)$. Como temos duas letras, significa que na combinação linear temos dois vetores.

Assim:

$$(2x, x - z, z, x + 4z) = (2x, x, 0, x) + (0, -z, z, 4z) = x(2, 1, 0, 1) + z(0, -1, 1, 4)$$

Logo, $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(2, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 4)\}$ é um sistema de geradores de S . Ou, mais simplesmente:

$$S = [(2, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 4)].$$



Base e dimensão

4.1 Dependência e independência linear

Vamos determinar o subespaço do $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$ e $\mathbf{w} = (7, 2)$, ou seja, sendo $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, determinemos o conjunto $[S]$ dado por

$$[S] = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos escrever $\mathbf{w}$ como CL de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}, \text{ e daí}$$

$$[S] = \{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma(3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

ou ainda

$$[S] = \{(\alpha + 3\gamma)\mathbf{u} + (\beta + 4\gamma)\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

chamando $\alpha' = \alpha + 3\gamma$, $\beta' = \beta + 4\gamma$, $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, temos:

$$[S] = \{\alpha'\mathbf{u} + \beta'\mathbf{v} \mid \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}],$$

ou seja, o subespaço gerado por $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é o **mesmo** que é gerado por $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

Agora: olhando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, notamos que **nenhum** deles pode ser CL do outro.

De fato, suponhamos que $\mathbf{u}$ seja CL de $\mathbf{v}$, isto é,

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$(1, 2) = \alpha(1, -1) \Rightarrow \alpha = 1 \text{ e } \alpha = -2.$$

Absurdo!! (Do mesmo modo é absurdo que $\mathbf{v}$ seja CL de $\mathbf{u}$.)

Notemos que, se tirarmos do conjunto $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ o vetor $\mathbf{w}$ (que é CL dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$), o subespaço gerado pelo subconjunto S é o **mesmo** que o subespaço gerado pelo subconjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ (no qual **nenhum** dos vetores é CL do outro!).

Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ($n \geq 1$) um subconjunto de um espaço vetorial V .

Se $n = 1$, isto é, $S = \{\mathbf{v}_1\}$, estabelecemos:

- $\mathbf{v}_1 = 0$, então S é **linearmente dependente**, LD.
- $\mathbf{v}_1 \neq 0$, então S é **linearmente independente**, LI.

Se $n \geq 2$, então:

- S é **linearmente dependente** (LD) se pelo menos um dos vetores é combinação linear dos restantes.

- S é **linearmente independente (LI)** se não é linearmente dependente (LD), isto é, nenhum dos vetores é combinação linear dos restantes.

Nota: LD é não LI e LI é não LD.

Teorema $u_1, u_2, \dots, u_n$ LI $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$, com $\alpha_i = 0$ para todo i

Observe que $u_1, u_2, \dots, u_n$ LD $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$, com pelo menos um $\alpha_i \neq 0$.

EXEMPLOS

1. Consideremos $S = \{u, v, w\}$, sendo $u = (-9, 1, 16)$, $v = (3, -1, 2)$, $w = (-5, 1, 4)$, verifiquemos se S é LD ou LI.

Solução

Escrevendo, por exemplo,

$u = \alpha v + \beta w$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), vem:

$$(-9, 1, 16) = \alpha(3, -1, 2) + \beta(-5, 1, 4) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 5\beta = -9 \\ -\alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 4\beta = 16 \end{cases} \therefore \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

Levando $\alpha = 2$, $\beta = 3$ na 3ª equação, verificamos que ela é verdadeira, isto é,

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16.$$

Logo, o sistema tem solução única e portanto u é CL de v e w , donde S é LD.

2. Consideremos o conjunto $S = \{u, v, w\}$; sendo $u = (1, -1, 2)$, $v = (1, 2, 3)$, $w = (2, 1, 3)$, verifiquemos se S é LD ou LI.

Solução

Escrevendo, por exemplo,

$w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$ vem:

$$(2, 1, 3) = \alpha(1, -1, 2) + \beta(1, 2, 3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 & (1) \\ -\alpha + 2\beta = 1 & (2) \\ 2\alpha + 3\beta = 3 & (3) \end{cases}$$

De (1) e (2), calculamos $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Levando $\alpha = 1$, $\beta = 1$ em (3) vem:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \neq 3,$$

logo, o sistema não tem solução e, portanto, w não é CL de u e v . ■

Deixamos a cargo do leitor mostrar que também u não é CL de v e w e v não é CL de u e w .
Donde S é LI.

Vamos agora enunciar e provar três propriedades concernentes a esse assunto, que serão usados mais adiante.

Consideremos um espaço vetorial V e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($n \geq 1$) um subconjunto de V ($S \subset V$). Então valem as propriedades:

P_1 – Se o vetor nulo de V ($u = 0$) pertence a S , então S é LD.

Demonstração: De fato, se, por exemplo, $v_1 = 0$, podemos escrever

$$0 = 0v_2 + \dots + 0v_n \quad (0 \in \mathbb{R}), \text{ ou seja, } 0 \text{ é CL de } v_2, \dots, v_n, \text{ e daí } S \text{ é LD.}$$

P_2 – Se S contém um subconjunto LD, então S é LD.

Demonstração: Para simplificar, suponhamos

$$\{v_1, \dots, v_k\}, \quad (1 \leq k < n)$$

um subconjunto LD de S . Então, por exemplo:

$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, com $\alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, ou seja, tomamos v_1 como CL de $v_2, \dots, v_k$, mas então: $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + 0v_{k+1} + \dots + 0v_n$, em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, 0 \in \mathbb{R}$, e assim v_1 será CL de $v_2, \dots, v_n$, donde S é LD.

P_3 – Se S é LI, então qualquer subconjunto dele é LI.

Demonstração: De fato, se S tivesse um subconjunto LD, por P_2 , S seria LD, contrariando a afirmativa de que S é LI. Donde segue a tese.

4.2 Base

Definição Uma base de um espaço vetorial V é um subconjunto ordenado $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que satisfaz as condições:

$$\begin{cases} (1) V = [B] \\ (2) B \text{ é LI} \end{cases} \quad (\text{isto é, } B \text{ gera } V)$$

(A definição é a mesma quando V é um subespaço vetorial.)

Observação:

Se $u \in V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, chamamos os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de coordenadas de u na base B e usamos a notação $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B$.

Teorema Todo espaço vetorial, não-trivial, tem base.

Teorema Todas as bases de um espaço vetorial V têm o mesmo número (a mesma quantidade) de vetores.

Omitiremos a demonstração desses teoremas por não ser de interesse neste texto. Esse número de vetores é denominado **dimensão** do espaço vetorial V e é denotado por $\dim V$.

Então, se B é base de V e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tem n vetores, escrevemos:

$$n = \dim V.$$

O mesmo vale para subespaços vetoriais.

Observação: Se $S = \{0\}$ (subespaço trivial ou subespaço nulo), podemos dizer que não existe base ou que a base é vazia e por definição $\dim S = 0$.

Teoremas

1. Seja S subespaço de V . Então:

- a) $\dim S \leq \dim V$
- b) $\dim S = \dim V \Leftrightarrow S = V$

2. $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$, S e T subespaços de V .

Notemos que: $\dim(S + T) = \dim V \Rightarrow S + T = V$

Para maior simplicidade, trabalharemos no próximo exemplo com $V = \mathbb{R}^3$, mas o resultado que vamos obter vale para qualquer n ($n \geq 1$).

EXEMPLO

Seja $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Consideremos o subconjunto $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Mostremos que C é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = [C]\end{aligned}$$

(b) Seja a equação:

$$\begin{aligned}\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) &= (0, 0, 0) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}) \\ \text{então: } \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) &= (\alpha, \beta, \gamma) = \\ &= (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

A partir da equação anterior, nenhum dos vetores pode ser escrito como CL dos outros dois (só poderíamos escrever assim o vetor cujo coeficiente não fosse nulo). Donde C é LI. Portanto, C é base de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. ■

4.3 Base canônica

Se consideramos agora em $\mathbb{R}^n$, temos:

$$C = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

que tem n vetores LI, entendemos facilmente que C é uma base do $\mathbb{R}^n$. Essa é a base mais simples possível com a qual trabalhamos no $\mathbb{R}^n$, e é chamada a **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, segue que: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Notemos que, se C é base canônica do $\mathbb{R}^n$, escrevemos um vetor u simplesmente como

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

omitindo o índice que indica a base.

Vamos resolver agora a seguinte questão: como encontrar uma base (e, conseqüentemente, a dimensão) de um dado subespaço do $\mathbb{R}^n$.

Dado um subespaço U do $\mathbb{R}^n$, já sabemos determinar um conjunto gerador de U ; sendo S esse conjunto, temos: $U = [S]$, daí:

- se S é LI, então é base;
- se não, temos que obter um processo para extrair de S o “maior” subconjunto LI possível (pois já vimos que o subespaço gerado por S e por um seu subconjunto LI é o mesmo). Foi dito o “maior” porque queremos justamente a “menor” quantidade de vetores necessária para gerar o mesmo subespaço, e isso corresponde ao “maior” subconjunto LI que podemos extrair de S .

Para chegar a esse processo, introduziremos antes algumas reflexões necessárias.

1. Lembremos que uma matriz está escalonada se a partir da primeira linha cada linha tem um zero a mais que a anterior, formando um “triângulo retângulo” de zeros. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- a. Se uma matriz está escalonada e tem uma ou mais linhas nulas, então o conjunto de vetores-linhas correspondente é LD.
- b. Se, por outro lado, não tem linhas nulas, então o conjunto de vetores-linhas correspondente é LI, conforme o exemplo:

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ consideremos a equação:}$$

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

que corresponde ao sistema $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$, cuja solução é $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e concluímos que

S é LI (conforme vimos anteriormente).

- c. Segue também que, se há uma ou mais linhas nulas, o subconjunto dos vetores-linhas formado pelos vetores-linhas **não-nulos** é LI (é uma parte LI do conjunto todo que é LD).
3. Se considerarmos um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ e a correspondente matriz formada pelos vetores-linhas (colocando as coordenadas dos vetores como linhas), observamos que, se aplicamos às linhas da matriz as três operações elementares já definidas, sempre obtemos outros vetores-linhas pertencentes a $[S]$ (isso segue da “linearidade” das operações elementares com linhas e da definição de subespaço gerado).

Essas reflexões justificam o método (processo) para a obtenção de uma base de um subespaço do $\mathbb{R}^n$, o qual descrevemos a seguir.

Seja U o subespaço do $\mathbb{R}^n$ em questão:

- a. primeiramente determinamos um sistema gerador de U , a que denominaremos sistema S : ($U = [S]$);

- b. formamos a matriz A , cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S , e aplicamos a ela as operações elementares com linhas, transformando a matriz A numa matriz escalonada A' , e vem:
- (i) se A' não tem linha nula, S é LI e é uma base (como também o subconjunto S' formado pelos vetores-linhas de A');
 - (ii) se A' tem uma ou mais linhas nulas, as linhas **não-nulas** correspondem a um subconjunto LI de S (ou um subconjunto LI de S'), portanto uma base de U . O número de vetores dessa base é a dimensão de U .

Os seguintes exemplos esclarecerão a aplicação do método.

EXEMPLOS

Determine uma base e a dimensão de cada subespaço dado:

1. $V = \mathbb{R}^2$; $U = \{(2y, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Solução

$$(2y, y) = y(2, 1)$$

$\therefore U = [(2, 1)]$, isto é, $(2, 1)$ gera U . Como $(2, 1) \neq (0, 0)$, temos que $\{(2, 1)\}$ é LI e portanto base de U . Logo, $B = \{(2, 1)\}$ é uma base de U e $\dim U = 1$.

2. $V = \mathbb{R}^2$

$$U = \{(x, y) \mid y = 7x\} = \{(x, 7x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, 7x) \in U \Rightarrow (x, 7x) = x(1, 7) \therefore U = [(1, 7)], \text{ isto é, } (1, 7) \text{ gera } U.$$

Solução

Como $(1, 7) \neq (0, 0)$, temos que $\{(1, 7)\}$ é LI e portanto base de U . Logo, $B = \{(1, 7)\}$ é uma base de U e $\dim U = 1$.

3. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, z) \mid z = 2x + 3y\} = \{(x, y, 2x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Solução

$$(x, y, 2x + 3y) \in U \Rightarrow (x, y, 2x + 3y) = (x, 0, 2x) + (0, y, 3y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3)$$

$$\therefore U = [(1, 0, 2), (0, 1, 3)], \text{ isto é, } \{(1, 0, 2), (0, 1, 3)\} \text{ gera } U.$$

Se escrevemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a matriz já está escalonada, com nenhuma linha nula, logo $S = \{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$ é LI.

Donde uma base de U é $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 3)\}$ e $\dim U = 2$.

$$4. V = [(1, -2, 3), (3, 2, -1), (4, 5, 3)] \subset \mathbb{R}^3.$$

Solução

Aqui são dados os geradores, mas é necessário o escalonamento para sabermos se são LI ou LD.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 13 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{58}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 - 3L_1 & L_3 &= L_3 - \frac{13}{8}L_2 & \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 &= L_3 - 4L_1 & & & \frac{8}{58}L_3 \end{aligned}$$

A matriz está escalonada com nenhuma linha nula, logo os vetores são LI. Donde uma base de V é $B = \{(1, -2, 3), (0, 2, -5), (0, 0, 1)\}$ e $\dim V = 3$.

Observação: Poderíamos também escolher como base o próprio conjunto gerador do início mas essa é mais "simples"!

$$5. W = [(1, -1, 3), (2, 3, -1), (3, 2, 2)] \subset \mathbb{R}^3$$

Solução

Escalonemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 - 2L_1 & L_3 &= L_3 - L_2 \\ L_3 &= L_3 - 3L_1 & & \end{aligned}$$

A matriz escalonada tem uma linha nula, logo os vetores são LD e as linhas não-nulas correspondem a uma parte LI. Donde, uma base de W é $B = \{(1, -1, 3), (0, 5, -7)\}$ e $\dim W = 2$.

A observação do exemplo anterior também se aplica aqui.

$$6. U = [(1, -1, 2, 1), (2, 3, -1, 3), (3, 2, 1, 4), (5, 5, 0, 7)] \subset \mathbb{R}^4$$

Solução

Escalonemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 - 2L_1 & L_3 &= L_3 - L_2 \\ L_3 &= L_3 - 3L_1 & L_4 &= L_4 - 2L_2 \\ L_4 &= L_4 - 5L_1 & & \end{aligned}$$

A matriz escalonada tem duas linhas nulas, logo o conjunto é LD, mas as duas linhas não-nulas correspondem à parte LI. Segue que uma base de U é $B = \{(1, -1, 2, 1), (0, 5, -5, 1)\}$ e $\dim U = 2$.

7. Dados

$$U = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3\} \text{ e } V = \{(y, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

verificar se $\mathbb{R}^3$ é soma direta dos subespaços U e V , isto é,

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus V.$$

Solução

Lembrando que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus V \iff \begin{cases} \text{a) } U + V = \mathbb{R}^3 \\ \text{b) } U \cap V = \{0\} \end{cases} \text{ temos:}$$

- a. Para verificar se $U + V = \mathbb{R}^3$, vamos utilizar $\dim(S + T) = \dim V \iff S + T = V$, isto é, devemos determinar $\dim(U + V)$ e verificar se é igual a 3. Como $U + V = \{(x + y, -x + y, z) \in \mathbb{R}^3\}$, para determinar $\dim(U + V)$ devemos encontrar uma base de $U + V$

$$(x + y, -x + y, z) = (x, -x, 0) + (y, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, -1, 0) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

assim $U + V = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ são LI}$$

$$L_2 = L_2 - L_1$$

$\therefore B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $U + V$ e $\dim U + V = 3$, logo, $U + V = \mathbb{R}^3$.

- b. Determinemos $U \cap V$.

Igualando os vetores de U e V , temos

$$(x, -x, 0) = (y, y, z) \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ -x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

da 1ª e 2ª equações temos $x = y = 0 \therefore U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$, logo $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

8. Sendo $U = \{(x, x - z, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$ e $V = \{(2y, y, t, t) \in \mathbb{R}^4\}$ determine uma base e a dimensão de U , V , $U + V$ e $U \cap V$.

Solução

Base de U :

$$(x, x - z, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, -1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$$

$$U = \{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ já está escalonada, portanto são LI.}$$

$B_U = \{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de U e $\dim U = 3$.

Base de V :

$$(2y, y, t, t) = y(2, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1)$$

$$V = [(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ já está escalonada, logo é LI.}$$

$B_V = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de V e $\dim V = 2$.

Base de $U + V$:

Lembrando da observação feita em subespaço gerado, temos:

$$U + V = [B_U \cup B_V],$$

assim,

$$U + V = [(1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 = L_4 - 2L_1$ $L_{3,5}$ $L_4 = L_4 + L_3$
 $L_4 = L_4 - L_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ os 5 vetores são LD, porém os 4 primeiros são LI.}$$

$L_5 = L_5 - L_1$

Logo, $B_{U+V} = \{(1, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de $U + V$ e $\dim U + V = 4$.

Base de $U \cap V$:

Igualando os vetores de U e V , temos:

$$(x, x - z, z, t) = (2a, a, b, b) \text{ e daí}$$

$$\begin{cases} x = 2a \\ x - z = a \\ z = b \\ t = b \end{cases} \quad \text{resolvendo o sistema, temos } b = a$$

Assim, $U \cap V = \{(2a, a, a, a) \in \mathbb{R}^4\}$ como $(2a, a, a, a) = a(2, 1, 1, 1)$. Temos que:

$$B_{U \cap V} = \{(2, 1, 1, 1)\} \text{ é uma base de } U \cap V \text{ dim } U \cap V = 1.$$

Transformações lineares

5.1 Revisão de Funções

Dados dois conjuntos A e B , lembremos que $f: A \rightarrow B$ é uma **função** (ou **transformação** ou **aplicação**) se para cada $a \in A$ está associado um único elemento $b, b \in B$.

O conjunto A é chamado *domínio* de f , e o conjunto B é chamado *contradomínio* de f . O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$. E o conjunto $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$ é chamado de *imagem* de f .

Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é *injetora* se e somente se elementos distintos de A têm imagem distintas, isto é,

$$f \text{ injetora} \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A).$$

Podemos também escrever:

$$f \text{ injetora} \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A).$$

Dizemos também que uma função $f: A \rightarrow B$ é *sobrejetora* se cada $b \in B$ é imagem de ao menos um $a \in A$. Uma função é *bijetora* se é injetora e sobrejetora.

Suponhamos que $f: A \rightarrow B$ seja bijetora. Para cada $b \in B$ existe um único $a \in A$, tal que $f(a) = b$, então podemos dizer que existe uma função $g: B \rightarrow A$ denominada *inversa* de f , tal que $g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Se f admite inversa, diremos que f é *inversível*, e sua inversa será denotada f^{-1} . Observe que se g é a inversa de f , então f é a inversa de g .

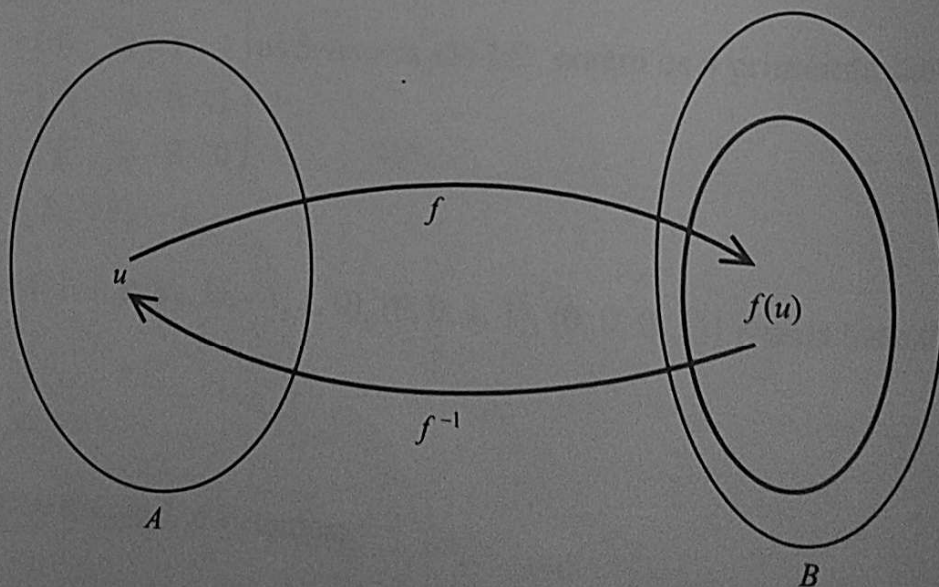


Figura 5.1

5.2 Transformação linear

Dizemos que uma função F é uma **transformação** (função, aplicação) **linear** se valem as condições:

- (1) $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)$
- (2) $\forall \mathbf{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}, F(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \cdot F(\mathbf{u})$

Da definição segue imediatamente uma propriedade das transformações lineares, que será útil para verificarmos se uma dada função *não* é linear.

Sejam U e V espaços vetoriais e $F: U \rightarrow V$ uma transformação linear. Indicando, respectivamente, por $\mathbf{0}_U$ e $\mathbf{0}_V$ os vetores nulos dos espaços U e V , então vale:

Propriedade

$$F(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$$

Demonstração: $F(\mathbf{0}_U) = F(0 \cdot \mathbf{0}_U) = 0 \cdot F(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$.

Dessa propriedade decorre: se uma função leva o vetor nulo de U em um vetor *não-nulo* de V , isto é, $F(\mathbf{0}_U) \neq \mathbf{0}_V$, então ela **não pode ser linear**.

EXEMPLOS

Verifique quais das funções dadas a seguir são lineares:

- a. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x, y) = 2x + y + 7$

Solução

$F(0, 0) = 2 \cdot 0 + 0 + 7 = 7$, donde $F(0, 0) \neq 0$ (vetor nulo de $\mathbb{R}$) e, pela propriedade anterior, F não é função linear.

- b. $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $G(x, y) = (2x, 3x + 4y)$

Solução

$G(0, 0) = (2 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0) = (0, 0)$; disso não decorre coisa alguma, e temos que constatar se valem as condições (1) e (2) da definição de transformação (função) linear.

- (1) Sejam $\mathbf{u}_1 = (x, y), \mathbf{u}_2 = (r, s) \in \mathbb{R}^2$

$$G(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = G(x + r, y + s) = (2(x + r), 3(x + r) + 4(y + s)) = (2x + 2r, 3x + 3r + 4y + 4s)$$

$$G(\mathbf{u}_1) + G(\mathbf{u}_2) = G(x, y) + G(r, s) = (2x, 3x + 4y) + (2r, 3r + 4s) =$$

$$= (2x + 2r, 3x + 4y + 3r + 4s) = (2x + 2r, 3x + 3r + 4y + 4s).$$

Donde $G(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = G(\mathbf{u}_1) + G(\mathbf{u}_2), \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ e vale (1).

- (2) Seja $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$G(\alpha \cdot \mathbf{u}) = G(\alpha \cdot (x, y)) = G(\alpha x, \alpha y) = (2(\alpha x), 3(\alpha x) + 4(\alpha y))$$

$$\alpha \cdot G(\mathbf{u}) = \alpha \cdot G(x, y) = \alpha \cdot (2x, 3x + 4y) = (\alpha(2x), \alpha(3x + 4y)) = (2(\alpha x), 3(\alpha x) + 4(\alpha y))$$

Donde $G(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot G(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e vale (2).

Portanto G é função linear.

- c. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, definida por $T(x, y, z) = (x^2, x + y, 2y + z, x + z)$

Solução

$$T(0, 0, 0) = (0^2, 0 + 0, 2 \cdot 0 + 0, 0 + 0) = (0, 0, 0).$$

(Nada a concluir!)

Vejam se valem as condições (1) e (2) da definição de função linear.

(1) Sejam $\mathbf{u}_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u}_2 = (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= T(x+r, y+s, z+t) = ((x+r)^2, x+r+y+s, 2y+2s+z+t, x+r+z+t) \\ T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) &= T(x, y, z) + T(r, s, t) = (x^2, x+y, 2y+z, x+z) + (r^2, r+s, 2s+t, r+t) = \\ &= (x^2 + r^2, x+y+r+s, 2y+z+2s+t, x+z+r+t) \end{aligned}$$

Como $(x+r)^2 \neq x^2 + r^2$ (em geral), segue que

$$T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \neq T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2).$$

Donde “fura” (1) e T não é função linear.

d. $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, y, z) = (x + 2y, x + y - z)$

Solução

$$H(0, 0, 0) = (0 + 2 \cdot 0, 0 + 0 - 0) = (0, 0).$$

Vejam as condições de linearidade:

(1) Sejam $\mathbf{u}_1 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u}_2 = (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= H(x+r, y+s, z+t) = (x+r+2(y+s), x+r+y+s-(z+t)) = \\ &= (x+r+2y+2s, x+r+y+s-z-t) \\ H(\mathbf{u}_1) + H(\mathbf{u}_2) &= H(x, y, z) + H(r, s, t) = (x+2y, x+y-z) + (r+2s, r+s-t) = \\ &= (x+2y+r+2s, x+y-z+r+s-t) = (x+r+2y+2s, x+r+y+s-z-t). \end{aligned}$$

Donde $H(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = H(\mathbf{u}_1) + H(\mathbf{u}_2)$, $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$

(2) Sejam

$$\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$H(\alpha \cdot \mathbf{u}) = H(\alpha \cdot (x, y, z)) = H(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y - \alpha z)$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot H(\mathbf{u}) &= \alpha \cdot H(x, y, z) = \alpha(x + 2y, x + y - z) = (\alpha(x + 2y), \alpha(x + y - z)) = \\ &= (\alpha x + 2\alpha y, \alpha x + \alpha y - \alpha z). \end{aligned}$$

Donde $H(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot H(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, logo vale a condição (2). Portanto H é função linear. ■

Propriedade generalizada da linearidade (PGL)

Seja $F: U \rightarrow V$, função linear, temos que

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}:$$

$$\text{a. } F(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \stackrel{(1)}{=} F(\alpha \mathbf{u}) + F(\beta \mathbf{v}) \stackrel{(2)}{=} \alpha F(\mathbf{u}) + \beta F(\mathbf{v})$$

$$\text{b. } F(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w}) \stackrel{(1)}{=} F(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) + F(\gamma \mathbf{w}) \stackrel{(a) \text{ e } (2)}{=} \alpha F(\mathbf{u}) + \beta F(\mathbf{v}) + \gamma F(\mathbf{w})$$

Geralmente: $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in U$,

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R},$$

temos:

$$F(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \alpha_1 F(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 F(\mathbf{u}_2) + \dots + \alpha_n F(\mathbf{u}_n).$$

Essa propriedade generalizada da linearidade (PGL), que é um modo mais sintético e mais geral de expressar a linearidade, tem uma importante aplicação, a qual é ilustrada nos exemplos a seguir.

EXEMPLOS

1. Sabendo que $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + z, y)$, é linear, determine a imagem dos vetores pela transformação:
- a. $(1, 2, 3)$ b. $(0, 0, 1)$ c. $(1, 2, -1)$

Solução

- a. $T(1, 2, 3) = (1 + 3, 2) = (4, 2)$
 b. $T(0, 0, 1) = (0 + 1, 0)$
 c. $T(1, 2, -1) = (1 - 1, 2)$
2. Sendo $T(x, y) = (2x, 2y)$ uma transformação linear, determine a imagem do segmento AB pela transformação linear T , $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$.

Solução

$$T(A) = T(0, 0) = (0, 0)$$

$$T(B) = T(1, 1) = (2, 2)$$

É fácil verificar que todos os pontos do segmento AB são levados pela transformação T em todos os pontos do segmento $A'B'$. Temos também que, se M é ponto médio do segmento AB , então $M' = T(M)$ também será ponto médio do segmento $A'B'$.

(Faça como exercício.)

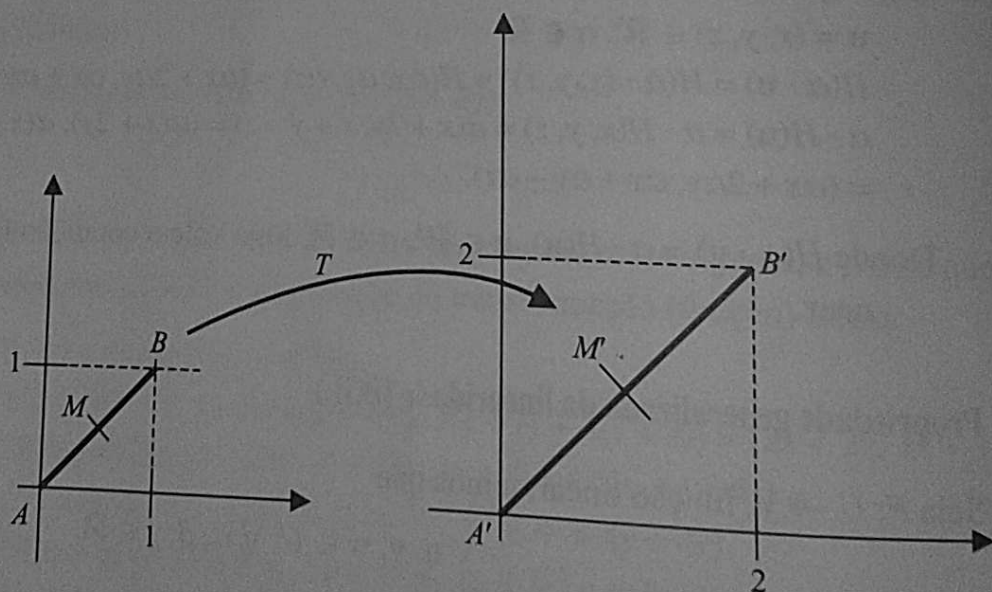


Figura 5.3

3. Dada a figura a seguir, determine a sua imagem pelas transformações:
- a. $T(x, y) = (x + 1, y - 1)$ (translação)
 b. $S(x, y) = (x, -3x + y)$

Justifique por que a transformação T não é linear.

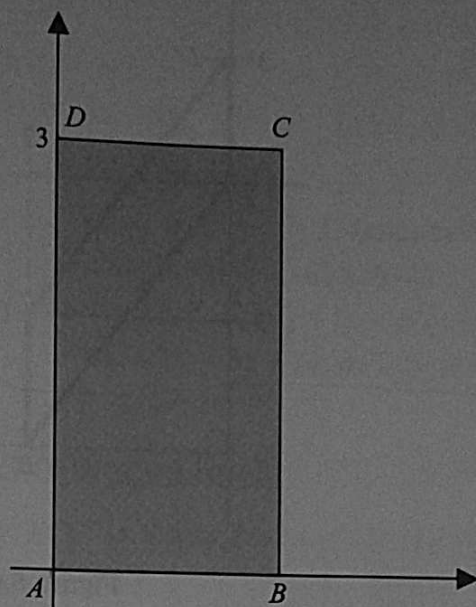


Figura 5.4

Solução

Basta calcular a imagem de cada vértice da figura.

$$\begin{aligned} \text{a. } T(0, 0) &= (1, -1) = A' & T(2, 0) &= (3, -1) = B' \\ T(2, 3) &= (3, 2) = C' & T(0, 3) &= (1, 2) = D' \end{aligned}$$

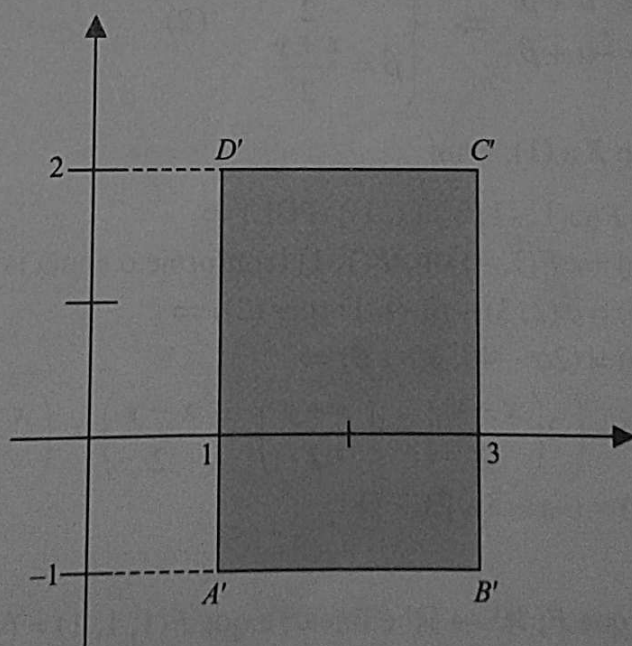


Figura 5.5

T não é linear pois, $T(0, 0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{b. } S(0, 0) &= (0, 0) = A' & S(2, 0) &= (2, -6) = B' \\ S(2, 3) &= (2, -3) = C' & S(0, 3) &= (0, 3) = D' \end{aligned}$$

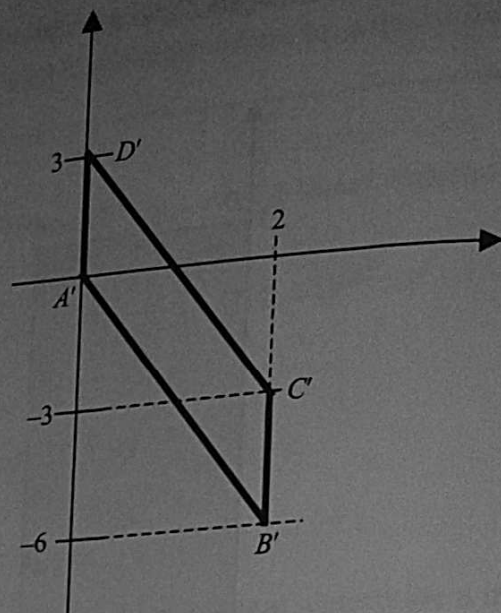


Figura 5.6

4. Sabendo que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função linear e que $F(1, -1) = (2, 3)$ e $F(1, 1) = (-4, 1)$, sendo $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, determine $F(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (lei de F).

Solução

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sendo $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, temos:

$$(1) \quad (x, y) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\text{daí, } \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x-y}{2} \\ \beta = \frac{x+y}{2} \end{cases} \quad (2)$$

aplicando F a (1), vem:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(\alpha(1, -1) + \beta(1, 1)) \text{ (PGL)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, y) = \alpha F(1, -1) + \beta F(1, 1) \text{ (conforme o enunciado)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, y) = \alpha(2, 3) + \beta(-4, 1) \text{ (por (2))} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, y) = (2\alpha - 4\beta, 3\alpha + \beta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, y) = \left(2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 4\left(\frac{x+y}{2}\right), 3\left(\frac{x-y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x, y) = (-x - 3y, 2x - y) \end{aligned}$$

5. Sabendo que $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é linear, e que $F(1, 1, 1) = (-2, 1, 3, 2)$, $F(0, 1, 1) = (1, 2, 3, -4)$, $F(0, 0, 1) = (-1, 3, 6, 1)$, sendo $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$, determine $F(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Solução

B é base do $\mathbb{R}^3$, logo $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos:

$$(1) \quad (x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases} \text{ cuja solução é: } \alpha = x, \beta = y - x \text{ e } \gamma = z - y$$

(para resolver basta “descer a escada”).

Aplicando F a (1) e usando a PGL, vem;

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(\alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1)) \\ \Rightarrow F(x, y, z) &= \alpha F(1, 1, 1) + \beta F(0, 1, 1) + \gamma F(0, 0, 1) \text{ (enunciado)} \\ \Rightarrow F(x, y, z) &= \alpha(-2, 1, 3, 2) + \beta(1, 2, 3, -4) + \gamma(-1, 3, 6, 1) \\ \Rightarrow F(x, y, z) &= x(-2, 1, 3, 2) + (y - x)(1, 2, 3, -4) + (z - y)(-1, 3, 6, 1) \\ \Rightarrow F(x, y, z) &= (-3x + 2y - z, -x - y + 3z, -3y + 6z, 6x - 5y + z) \end{aligned}$$

5.3 Núcleo e imagem de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais, $F: U \rightarrow V$ transformação linear (função linear).

5.3.1 Núcleo

Definimos como **núcleo da transformação** (função) **linear** F o conjunto $N(F)$, subconjunto de U , dado por:

$$N(F) = \{u \in U \mid F(u) = 0_v\}.$$

Podemos também utilizar a notação $\text{Ker } F$ (abreviatura da palavra inglesa *Kernel*) para designar o núcleo de F .

Graficamente:

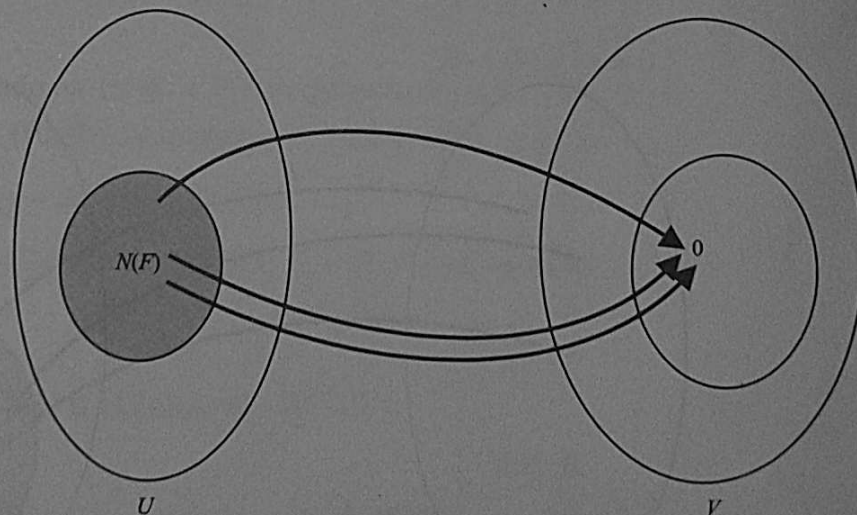


Figura 5.7

Proposição $N(F)$ é subespaço de U .

De fato,

(1) $N(F) \neq \emptyset$, pois, $F(0_u) = 0_v$ e daí $0_u \in N(F)$

- (2) $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in N(F)$, temos $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in N(F)$
 $F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, donde $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in N(F)$
- (3) $\forall \mathbf{u} \in N(F)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha \cdot \mathbf{u} \in N(F)$
 $\mathbf{u} \in N(F) \Rightarrow F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$
 $F(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha F(\mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, donde $\alpha \cdot \mathbf{u} \in N(F)$
- De (1), (2) e (3) temos que $N(F)$ é subespaço de U .

Proposição Seja $F: U \rightarrow V$ uma transformação linear, então:

$$N(F) = \{0\} \Leftrightarrow F \text{ é injetora}$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Dados $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, tal que $F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2)$, temos:

$$F(\mathbf{u}_1) - F(\mathbf{u}_2) = 0 \text{ e como } F \text{ é linear vem: } F(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0, \text{ e daí } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in N(F).$$

Como $N(F) = \{0\}$, temos que $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = 0$, isto é, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Logo, F é injetora.

$(\Leftarrow)$ Seja $\mathbf{u} \in N(F)$, então $F(\mathbf{u}) = 0$. Mas $F(0) = 0$, logo $F(\mathbf{u}) = F(0)$. Como F é injetora, temos que $\mathbf{u} = 0$. Portanto, $N(F) = \{0\}$ se F é injetora.

5.3.2 Imagem

Definimos como **imagem da transformação** (função) **linear** o conjunto:

$$\text{Im } F = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in U\}$$

ou, de modo mais direto: $\text{Im } F = \{F(\mathbf{u}) \in V \mid \mathbf{u} \in U\}$.

Graficamente:

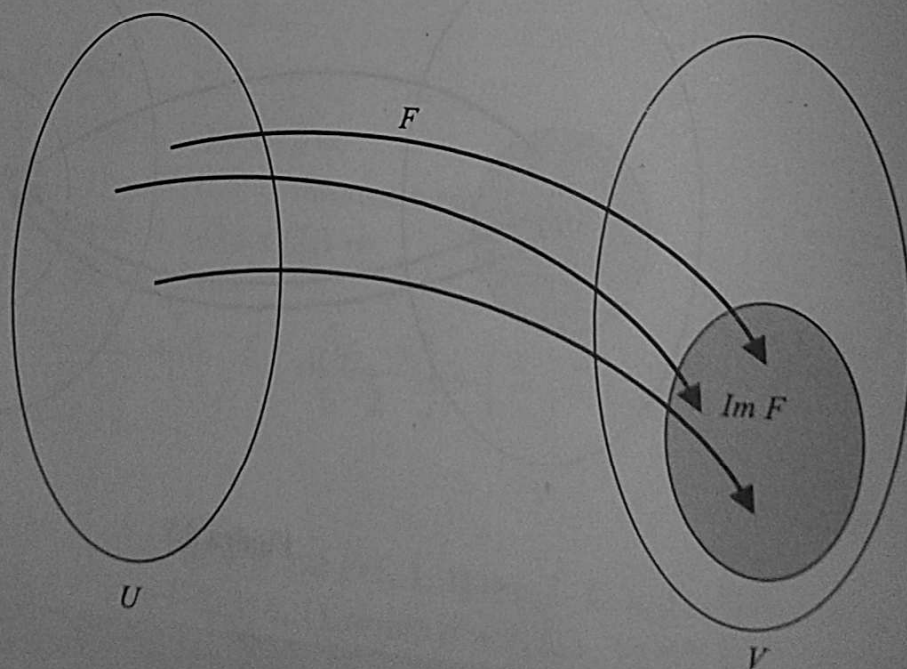


Figura 5.8

Proposição $\text{Im } F$ é subespaço de V .

- De fato: (1) $\text{Im } F \neq \emptyset$, pois, $F(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ e daí $\mathbf{0}_V \in \text{Im } F$
- (2) $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Im } F$, temos $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Im } F$
 $\mathbf{v}_1 \in \text{Im } F \Rightarrow \mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1 \in U$
 $\mathbf{v}_2 \in \text{Im } F \Rightarrow \mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2 \in U$
 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2), \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$, donde $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \text{Im } F$
- (3) $\forall \mathbf{v} \in \text{Im } F, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha \cdot \mathbf{v} \in \text{Im } F$
 $\mathbf{v} \in \text{Im } F \Rightarrow \mathbf{v} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in U$
 $\alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot F(\mathbf{u}) = F(\alpha \cdot \mathbf{u}), \alpha \cdot \mathbf{u} \in U$, donde $\alpha \cdot \mathbf{v} \in \text{Im } F$

De (1), (2) e (3) temos que $\text{Im } F$ é subespaço de V .

Observação: Se $F: U \rightarrow V$ é linear, então (F é sobrejetora $\Leftrightarrow \text{Im } F = V$)

Teorema da dimensão Seja $F: U \rightarrow V$ uma transformação linear então:

$$\dim \text{Im } F + \dim N(F) = \dim U$$

EXEMPLOS

I) Determine o núcleo e a imagem das funções lineares (transformações lineares).

1. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (y - 2x, y + 2x)$

Solução

a. $N(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = (0, 0)\}$

$$F(x, y) = (y - 2x, y + 2x) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\underline{2y = 0 \Rightarrow y = 0}$$

substituindo na 1ª ou na 2ª equação temos $x = 0$.

$\therefore N(F) = \{(0, 0)\}$ (subespaço trivial ou nulo)

b. $\text{Im } F = \{(y - 2x, y + 2x) \in \mathbb{R}^2\}$

2. $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $G(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x)$

Solução

a. $N(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) = (0, 0, 0)\}$

$$G(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y - 3x = 0 \Rightarrow y = 3x \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$$

$\therefore N(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$ ou $N(G) = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b. $\text{Im } G = \{(0, y - 3x, -y + 3x) \in \mathbb{R}^3\}$

3. $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(x, y, z) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z)$

Solução

a. $N(H) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid H(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$$H(x, y, z) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + 3y \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore N(H) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x + 3y\}$$

$$\text{ou } N(H) = \{(x, y, 2x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{b. Im } H = \{(0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$4. F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } F(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 3x - y - z, 0)$$

Solução

$$\text{a. } N(F) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\}$$

$$F(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 3x - y - z, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x + 2y \\ z = 3x - y \end{cases}$$

$$\therefore N(F) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = x + 2y \text{ e } z = 3x - y\}$$

$$\text{ou } N(F) = \{(x, y, 3x - y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{b. Im } F = \{(x + 2y - t, 3x - y - z, 0) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$5. F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ dada por } F(x, y, z) = (x - y, x - y + 2z, x + y + z)$$

Solução

$$\text{a. } N(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$F(x, y, z) = (x - y, x - y + 2z, x + y + z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

daí, substituindo na 3ª equação, vem $x + y = 0$

como $x - y = 0$ (1ª equação), temos $x = 0$ e $y = 0$

$$\therefore N(F) = \{(0, 0, 0)\} \text{ (subespaço trivial ou nulo)}$$

$$\text{b. Im } F = \{(x - y, x - y + 2z, x + y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Sendo núcleo e imagem de uma transformação (função) linear subespaços, o processo para determinação de base e dimensão é o mesmo já estudado.

II) Determine uma base e a dimensão dos Exemplos 1 a 5 anteriores.

$$1. F(x, y) = (y - 2x, y + 2x)$$

Solução

$$\text{a. } N(F) = \{(0, 0)\} \text{ (subespaço trivial).}$$

Por definição, base de $N(F) = \emptyset$ e $\dim N(F) = 0$

$$\text{b. Im } F = \{(y - 2x, y + 2x) \in \mathbb{R}^2\} \text{ e um sistema de geradores é } \{(1, 1), (-2, 2)\} \text{ daí,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{LI}$$

$$L_1 = L_2 + 2L_1$$

$\therefore$ base de $\text{Im } F$ é $B = \{(1, 1), (-2, 2)\}$ e $\dim \text{Im } F = 2$.

2. $G(x, y) = (0, y - 3x, -y + 3x)$

Solução

a. $N(G) = \{(x, 3x) \in \mathbb{R}^2\}$

$N(G) = [(1, 3)]$, como $(1, 3) \neq (0, 0)$ o conjunto é LI.

Logo, base de $N(G)$ é $B = \{(1, 3)\}$ e $\dim N(G) = 1$

b. $\text{Im } G = [(0, 1, -1), (0, -3, 3)]$

daí,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{LD}$$

$$L_2 = L_2 + 3L_1$$

mas $\{(0, 1, -1)\}$ é LI.

$\therefore B = \{(0, 1, -1)\}$ é base de $\text{Im } G$ e $\dim \text{Im } G = 1$

3. $H(x, y, z) = (0, 2x + 3y - z, -2x - 3y + z)$

Solução

a. $N(H) = [(1, 0, 2), (0, 1, 2)]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ já está escalonada, portanto o conjunto é LI.}$$

$\therefore B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2)\}$ é base de $N(H)$ e $\dim N(H) = 2$

b. $\text{Im } H = [(0, 2, -2), (0, 3, -3), (0, -1, 1)]$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{LD}$$

$$L_2 = L_2 + 2L_1$$

$$L_3 = L_3 + 3L_1$$

mas $\{(0, -1, 1)\}$ é LI.

$\therefore$ base de $\text{Im } H$ é $B = \{(0, -1, 1)\}$ e $\dim \text{Im } H = 1$

4. $F(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 3x - y - z, 0)$

Solução

a. $N(F) = [(1, 0, 3, 1), (0, 1, -1, 2)]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ já está escalonada, portanto o conjunto é LI.}$$

$\therefore$ base de $N(F)$ é $B = \{(1, 0, 3, 1), (0, 1, -1, 2)\}$ e $\dim N(F) = 2$

$$b. \operatorname{Im} F = [(1, 3, 0), (2, -1, 0), (-1, 0, 0), (0, -1, 0)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1 - 2L_2 \\ L_2 &= L_2 + L_1 \\ L_3 &= -L_2/7 \\ L_4 &= L_3/3 \\ L_4 &= (-1)L_4 \end{aligned}$$

Os quatro vetores são LD, mas os dois primeiros são LI.
 $\therefore$ base de $\operatorname{Im} F = \{(1, 3, 0), (0, 1, 0)\}$ e $\dim \operatorname{Im} F = 2$

$$5. F(x, y, z) = (x - y, x - y + 2z, x + y + z)$$

Solução

$$a. N(F) = \{(0, 0, 0)\} \text{ (subespaço trivial)}$$

Por definição, base de $N(F) = \emptyset$ e $\dim N(F) = 0$

$$b. \operatorname{Im} F = [(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (0, 2, 1)]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{LI.}$$

$$L_{2,3} \quad L_3 = L_3 + L_1$$

$\therefore$ base de $\operatorname{Im} F$ é $B = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 2)\}$ e $\dim \operatorname{Im} F = 3$.

5.4 Operações com transformações lineares

5.4.1 Adição

Sejam $F: U \rightarrow V$ e $G: U \rightarrow V$ transformações lineares.

Chamamos de **soma** das transformações F e G a transformação

$$F + G: U \rightarrow V \text{ dada por } (F + G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in U.$$

5.4.2 Multiplicação por escalar

Sejam $F: U \rightarrow V$ uma transformação linear e $k \in \mathbb{R}$.

Chamamos de **produto** de F por k a transformação

$$k \cdot F: U \rightarrow V \text{ dada por: } (k \cdot F)(\mathbf{u}) = k F(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in U.$$

Se F e G são lineares, então $F + G$ e kF também são lineares.

5.4.3 Composição

Sejam $F: U \rightarrow V$ e $G: V \rightarrow W$ transformações lineares.

Chamamos de função **composta** de G com F e denotamos $G \circ F$, a transformação

$$G \circ F: U \rightarrow W \text{ dada por } (G \circ F)(\mathbf{u}) = G(F(\mathbf{u})), \forall \mathbf{u} \in U.$$

Se F e G são lineares, então $G \circ F$ é linear.

5.4.4 Propriedades

Sejam S e T transformações lineares de U em V , e G e F transformações lineares de V em W , e seja $k \in \mathbb{R}$, então:

1. $G \circ (S + T) = G \circ S + G \circ T$
2. $(G + F) \circ S = G \circ S + F \circ S$
3. $k(G \circ T) = (kG) \circ T = G \circ (kT)$

EXEMPLOS

1. Sejam $F, G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções lineares definidas por:

$$F(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 5x + z) \text{ e } G(x, y, z) = (3y - 2z, x - y + 5z)$$

Determine: a. $3F + 2G$ b. $2F - 5G$

Solução

a. $3F + 2G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (3F + 2G)(x, y, z) &= 3(x + 2y - 3z, 5x + z) + 2(3y - 2z, x - y + 5z) = \\ &= (3x + 6y - 9z, 15x + 3z) + (6y - 4z, 2x - 2y + 10z) = \\ &= (3x + 12y - 13z, 17x - 2y + 13z) \end{aligned}$$

$$\therefore (3F + 2G)(x, y, z) = (3x + 12y - 13z, 17x - 2y + 13z)$$

b. $2F - 5G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (2F - 5G)(x, y, z) &= 2(x + 2y - 3z, 5x + z) - 5(3y - 2z, x - y + 5z) = \\ &= (2x + 4y - 6z, 10x + 2z) - (15y - 10z, 5x - 5y + 25z) = \\ &= (2x - 11y + 4z, 5x + 5y - 23z) \end{aligned}$$

$$\therefore (2F - 5G)(x, y, z) = (2x - 11y + 4z, 5x + 5y - 23z)$$

2. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares dadas por:

$$F(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 3y), G(x, y) = (x + 3y, x - y, x + y) \text{ e } H(x, y, z) = (x - y + z, x - 2y - z, y - z).$$

Determine, se possível:

- a. $F \circ G$ b. $G \circ F$ c. $G \circ H$ d. $H \circ G$ e. $F \circ H$ f. $H \circ F$ g. $G \circ F \circ H$

Solução

a. $F \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x, y) &= F(G(x, y)) = F(x + 3y, x - y, x + y) = \\ &= (x + 3y + x - y - x - y, 2x + 6y - 3x + 3y) = \\ &= (x + y, -x + 9y) \end{aligned}$$

$$\therefore (F \circ G)(x, y) = (x + y, -x + 9y)$$

b. $G \circ F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(G \circ F)(x, y, z) &= G(F(x, y, z)) = G(x + y - z, 2x - 3y) = \\&= (x + y - z + 6x - 9y, x + y - z - 2x + 3y, x + y - z + 2x - 3y) = \\&= (7x - 8y - z, -x + 4y - z, 3x - 2y - z)\end{aligned}$$

$$\therefore (G \circ F)(x, y, z) = (7x - 8y - z, -x + 4y - z, 3x - 2y - z)$$

c. $G \circ H$ não é possível pois $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, assim $\text{Im } H \not\subset \text{Dom } G$.

d. $H \circ G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(H \circ G)(x, y) &= H(G(x, y)) = H(x + 3y, x - y, x + y) = \\&= (x + 3y - x + y + x + y, x + 3y - 2x + 2y - x - y, x - y - x - y) = \\&= (x + 5y, -2x + 4y, -2y)\end{aligned}$$

$$\therefore (H \circ G)(x, y) = (x + 5y, -2x + 4y, -2y)$$

e. $F \circ H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(F \circ H)(x, y, z) &= F(H(x, y, z)) = F(x - y + z, x - 2y - z, y - z) = \\&= (x - y + z + x - 2y - z - y + z, 2x - 2y + 2z - 3x + 6y + 3z) = \\&= (2x - 4y + z, -x + 4y + 5z)\end{aligned}$$

$$\therefore (F \circ H)(x, y, z) = (2x - 4y + z, -x + 4y + 5z)$$

f. não é possível a composição $H \circ F$, pois $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

g. $G \circ F \circ H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}(G \circ F \circ H)(x, y, z) &= (G \circ (F \circ H))(x, y, z) = G((F \circ H)(x, y, z)) = \\&= G(2x - 4y + z, -x + 4y + 5z) = \\&= (2x - 4y + z - 3x + 12y + 15z, 2x - 4y + z + x - 4y - 5z, 2x - 4y + z - x + 4y + 5z) = \\&= (-x + 8y + 16z, 3x - 8y - 4z, x + 6z)\end{aligned}$$

$$\therefore (G \circ F \circ H)(x, y, z) = (-x + 8y + 16z, 3x - 8y - 4z, x + 6z)$$

5.5 Operadores inversíveis

Seja $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear; no caso em que $U = V$, dizemos que a transformação T é um **operador linear**.

Um operador $T: U \rightarrow U$ é **inversível** se existe T^{-1} tal que:

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I \text{ (identidade).}$$

Lembremos que T é inversível se e somente se é uma função bijetora (injetora e sobrejetora).

Teorema: Seja $T: U \rightarrow U$ um operador linear. Se $N(T) = \{0\}$, então T é inversível.

Demonstração: Se $N(T) = \{0\}$, então T é injetora (como já vimos).

Como $N(T) = \{0\}$, temos $\dim N(T) = 0$, e pelo teorema da dimensão temos:

$$\dim(\operatorname{Im} T) + \underbrace{\dim N(T)}_{=0} = \dim U$$

$\therefore \dim(\operatorname{Im} T) = \dim U$, e como $\operatorname{Im} T \subset U$, concluímos que $\operatorname{Im} T = U$.

Logo, T é sobrejetora.

Como T é injetora e sobrejetora, temos que ela é bijetora e portanto inversível.

Assim, $N(T) = \{0\} \Rightarrow T$ é inversível.

EXEMPLO

Seja F o operador em $\mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (x + 3y, x)$. Mostre que F é inversível e determine F^{-1} .

Solução

Como F é operador linear, para que seja inversível devemos verificar somente que F é injetora, isto é, $N(F) = \{0\}$.

$$N(F) = \{(x, y) \mid F(x, y) = (0, 0)\}.$$

$$F(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + 3y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore N(F) = \{(0, 0)\}, \text{ logo } F \text{ é inversível}$$

Determinemos agora F^{-1}

$$\begin{aligned} F^{-1}(a, b) = (x, y) &\Leftrightarrow F(x, y) = (a, b) = (x + 3y, x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = a \Rightarrow 3y = a - x \Rightarrow 3y = a - b \Rightarrow y = \frac{a - b}{3} \\ x = b \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore F^{-1}(a, b) = \left(b, \frac{a - b}{3} \right)$$

Matriz de uma transformação linear

6.1 Matriz de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais com dimensões n e m , respectivamente, $T: U \rightarrow V$ uma transformação linear, $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ base de U e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ base de V .

Temos:

$$T(\mathbf{u}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{v}_m$$

$$T(\mathbf{u}_2) = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{v}_m$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{u}_n) = a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{v}_m$$

A matriz $m \times n$ dada por

$$(T)_{A,B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

em que a coluna j é formada pelas coordenadas de $T(\mathbf{u}_j)$ na base B , e é chamada **matriz de T em relação às bases A e B** .

Observações:

1. Se $U = V$ (operador linear) e escolho $A = B$, então $(T)_{A,A} = (T)_A$.
2. Se $U = \mathbb{R}^n$ e $V = \mathbb{R}^m$, e as bases são as canônicas, então $(T)_{A,B} = (T)$.

Teorema Sejam $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, A uma base de U e B uma base de V , então,

$$\text{se } (\mathbf{u})_A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_A, \mathbf{u} \in U \text{ vem: } (T(\mathbf{u}))_B = (T)_{A,B} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_A, T(\mathbf{u}) \in V$$

Observação: Nas aplicações em computação gráfica, usualmente utilizamos as bases canônicas. Enunciaremos a seguir alguns resultados úteis:

- a. Sejam $F, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ transformações lineares, e (F) e (G) suas matrizes canônicas, então:
- (i) $(F + G) = (F) + (G)$
 - (ii) $(\alpha F) = \alpha(F), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- b. Sejam $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ transformações lineares e (G) , (F) e $(F \circ G)$ as respectivas matrizes canônicas, então:

$$(F \circ G) = (F) \cdot (G)$$

EXEMPLOS

1. Determine a matriz de $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$ em relação às bases $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

Solução

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = \overset{x}{a_{11}}(1, 1) + \overset{y}{a_{21}}(0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, 0) = a_{12}(1, 1) + a_{22}(0, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 1) = a_{13}(1, 1) + a_{23}(0, 1)$$

$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{11} + a_{21} = 1 \Rightarrow a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{12} + a_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{13} + a_{23} = 1 \Rightarrow a_{23} = 1 \end{cases} \quad \therefore (T)_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sejam $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operador linear dado por $T(x, y, z) = (x, x - y, 2z)$ e $A = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $B = \{(-1, 0, 1), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$, determine $(T)_{A,B}$; $(T)_{B,A}$; $(T)_A$.

Solução

$$(T)_{A,B}$$

$$T(a_1) = T(1, 1, 0) = (1, 0, 0) = \alpha_1(-1, 0, 1) + \beta_1(0, -1, 0) + \gamma_1(0, 0, 1)$$

$$T(a_2) = T(0, 1, 1) = (0, -1, 2) = \alpha_2(-1, 0, 1) + \beta_2(0, -1, 0) + \gamma_2(0, 0, 1)$$

$$T(a_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = \alpha_3(-1, 0, 1) + \beta_3(0, -1, 0) + \gamma_3(0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 & = 1 \rightarrow \alpha_1 = -1 \\ -\beta_1 & = 0 \rightarrow \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 + \gamma_1 & = 0 \rightarrow \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha_2 & = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ -\beta_2 & = -1 \rightarrow \beta_2 = 1 \\ \alpha_2 + \gamma_2 & = 2 \rightarrow \gamma_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha_3 & = 0 \rightarrow \alpha_3 = 0 \\ -\beta_3 & = 0 \rightarrow \beta_3 = 0 \\ \alpha_3 + \gamma_3 & = 2 \rightarrow \gamma_3 = 2 \end{cases} \quad \therefore (T)_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (T)_{B,A} \\
 T(b_1) &= T(-1, 0, 1) = (-1, 1, 2) = \alpha_1(1, 1, 0) + \beta_1(0, 1, 1) + \gamma_1(0, 0, 1) \\
 T(b_2) &= T(0, -1, 0) = (0, 1, 0) = \alpha_2(1, 1, 0) + \beta_2(0, 1, 1) + \gamma_2(0, 0, 1) \\
 T(b_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = \alpha_3(1, 1, 0) + \beta_3(0, 1, 1) + \gamma_3(0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1 \rightarrow \beta_1 = 2 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 2 \rightarrow \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 \rightarrow \beta_2 = 1 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 0 \rightarrow \gamma_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 0 \rightarrow \beta_3 = 0 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 2 \rightarrow \gamma_3 = 2 \end{cases} \quad \therefore (T)_{B,A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes $(T)_{A,B}$ e $(T)_{B,A}$ são diferentes.

$(T)_A$

$$\begin{aligned}
 T(a_1) &= T(1, 1, 0) = (1, 0, 0) = \alpha_1(1, 1, 0) + \beta_1(0, 1, 1) + \gamma_1(0, 0, 1) \\
 T(a_2) &= T(0, 1, 1) = (0, -1, 2) = \alpha_2(1, 1, 0) + \beta_2(0, 1, 1) + \gamma_2(0, 0, 1) \\
 T(a_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = \alpha_3(1, 1, 0) + \beta_3(0, 1, 1) + \gamma_3(0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = -1 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 = -1 \rightarrow \beta_2 = -1 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 2 \rightarrow \gamma_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 0 \rightarrow \beta_3 = 0 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 2 \rightarrow \gamma_3 = 2 \end{cases} \quad \therefore (T)_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

ache a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de maneira que, sendo $A = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, se tenha $M = (T)_{A,B}$.

Solução

$$\begin{aligned}
 T(1, 1) &= 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 1, 1) = (1, 5, 3) \\
 T(0, 1) &= 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 1, 1) = (0, 1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = \alpha(1, 1) + \beta(0, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \end{cases} \Rightarrow \beta = y - x$$

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= T(\alpha(1, 1) + \beta(0, 1)) = \\
 &= \alpha T(1, 1) + \beta T(0, 1) = \\
 &= \alpha(1, 5, 3) + \beta(0, 1, 0) = \\
 &= x(1, 5, 3) + (y - x)(0, 1, 0) = \\
 &= (x, 5x, 3x) + (0, y - x, 0) = \\
 &= (x, 4x + y, 3x)
 \end{aligned}$$

$$\therefore T(x, y) = (x, 4x + y, 3x)$$

4. Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

determine a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que, sendo $A = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$, se tenha $M = (T)_{B, A}$.

Solução

$$T(b_1) = T(1, -1, 1) = 0(1, 1) + (-2)(0, 1) = (0, -2)$$

$$T(b_2) = T(0, 1, 0) = 0(1, 1) + 2(0, 1) = (0, 2)$$

$$T(b_3) = T(0, 1, 1) = (-1)(1, 1) + (3)(0, 1) = (-1, 2)$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 1, 1) = (\alpha, -\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \gamma)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta + \gamma \\ z = \alpha + \gamma \end{cases} \quad \text{daí} \quad \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = 2x + y - z, \\ \gamma = z - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) &= T(\alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 1, 1)) = \\
 &= \alpha T(1, -1, 1) + \beta T(0, 1, 0) + \gamma T(0, 1, 1) = \\
 &= x(0, -2) + (2x + y - z)(0, 2) + (z - x)(-1, 2) = \\
 &= (-z + x, -2x + 4x + 2y - 2z + 2z - 2x) = (-z + x, 2y)
 \end{aligned}$$

$$\therefore T(x, y, z) = (-z + x, 2y)$$

5. Dada a transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, y)$, determine a imagem da figura.

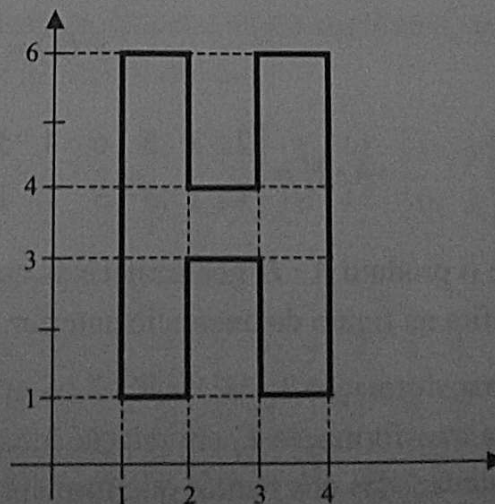


Figura 6.1

Solução

Devemos calcular a transformação nos vértices que formam a figura:

$$\begin{array}{ll} T(1, 1) = (2, 1) & T(3, 1) = (4, 1) \\ T(2, 1) = (3, 1) & T(3, 3) = (6, 3) \\ T(2, 3) = (5, 3) & T(3, 4) = (7, 4) \\ T(2, 4) = (6, 4) & T(3, 6) = (9, 6) \\ T(1, 6) = (7, 6) & T(4, 1) = (5, 1) \\ T(2, 6) = (8, 6) & T(4, 6) = (10, 6) \end{array}$$

Como já vimos, a transformação T é um cisalhamento, e a imagem da figura é:

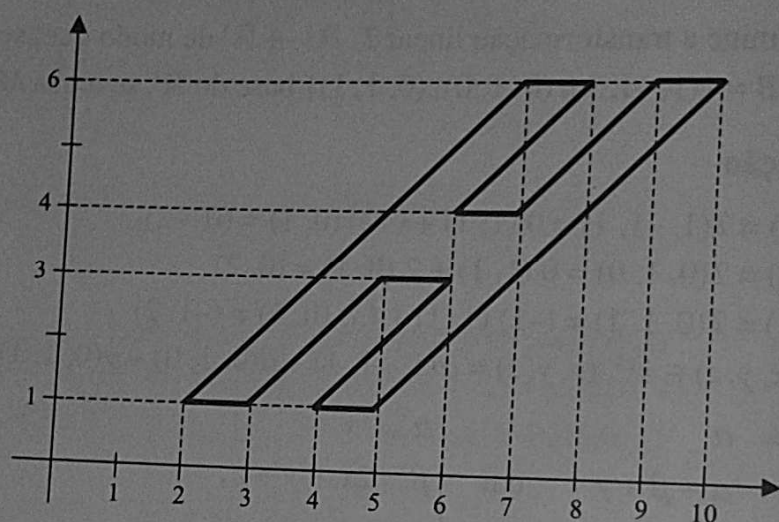


Figura 6.2

6. Determine a matriz H formada pelas coordenadas dos pontos marcados na figura do exercício anterior e $A = (T)$, matriz canônica da transformação T , $T(x, y) = (x + y, y)$. A seguir determine o produto $A \cdot H$.

Solução

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = (T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 5 & 10 & 9 & 7 & 6 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Notamos que o produto $A \cdot H$ nos fornece as coordenadas dos pontos da figura do exercício anterior. Confira na figura do exercício anterior.

7. Considere a transformação $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y) = (x, 2y)$ (expansão na coordenada y), calcule a matriz A_2 da transformação T_2 em relação à base canônica e o produto $A_2 \cdot H$, em que H é a matriz das coordenadas dos pontos que formam a figura do exemplo 5. A seguir represente a figura resultante.

Solução

$$A_2 = (T_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Do exercício anterior temos que:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\begin{aligned} A_2 \cdot H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 12 & 12 & 8 & 8 & 12 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

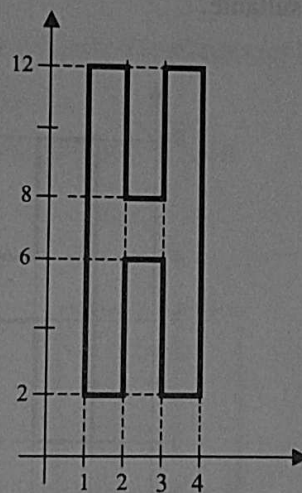


Figura 6.3

8. Utilizando as transformações T e T_2 dos exercícios anteriores e fazendo a composição das transformações, obteremos a matriz da transformação resultante, que será dada pelo produto das matrizes canônicas $A = (T)$ e $A_2 = (T_2)$, isto é,

$$A_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A ação resultante sobre a figura será portanto:

$$\begin{aligned} A_2 \cdot A \cdot H &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 5 & 10 & 9 & 7 & 6 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 12 & 12 & 8 & 8 & 12 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

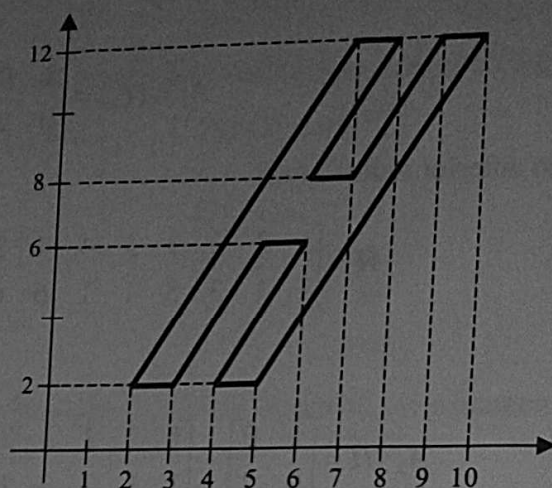


Figura 6.4

9. Determine a transformação que translada a Figura 6.5 2 unidades para a direita e 1 unidade para cima. A seguir determine, utilizando matrizes, a imagem dos pontos que formam a figura e mostre a figura resultante.

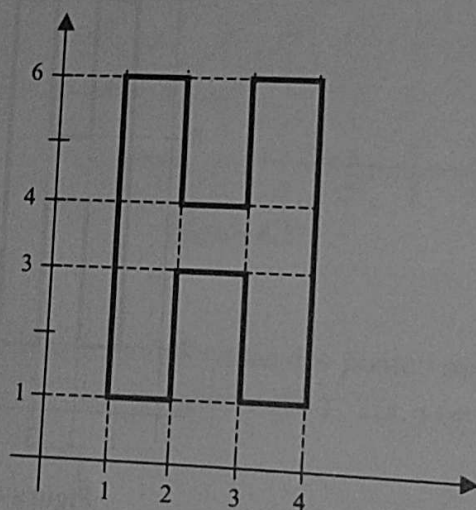


Figura 6.5

Solução

A transformação é dada por $T(x, y) = (x + 2, y + 1)$; como essa transformação não é linear, para podermos usar matriz devemos escrever a transformação T como $T(x, y) = (x, y) + (2, 1)$ e assim teremos que somar à matriz H uma matriz cujas colunas são todas iguais a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 & 7 & 7 & 5 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

e resulta a figura

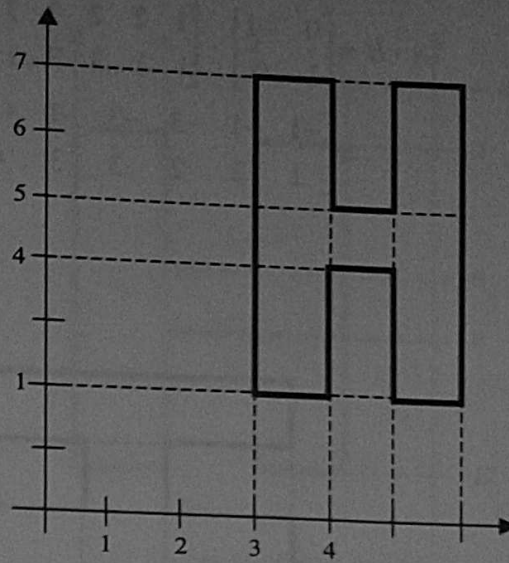


Figura 6.6

10. Determine a imagem da Figura 6.6 pela transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

(rotação de ângulo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$), sendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad

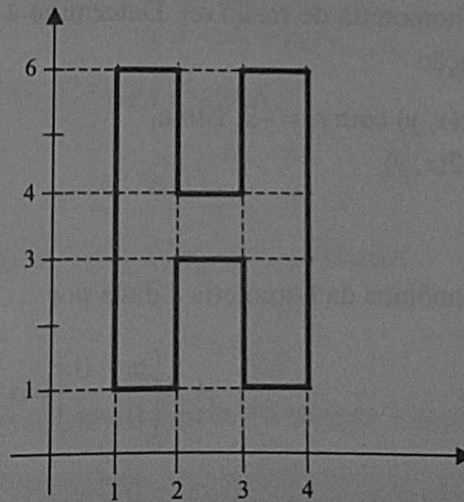


Figura 6.7

Solução

A matriz canônica da transformação T será

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{e se } \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ temos } \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo H a matriz dos vértices da figura, a imagem da figura será

$$\begin{aligned} A \cdot H &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 & -1 & -1 & -6 & -6 & -4 & -4 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

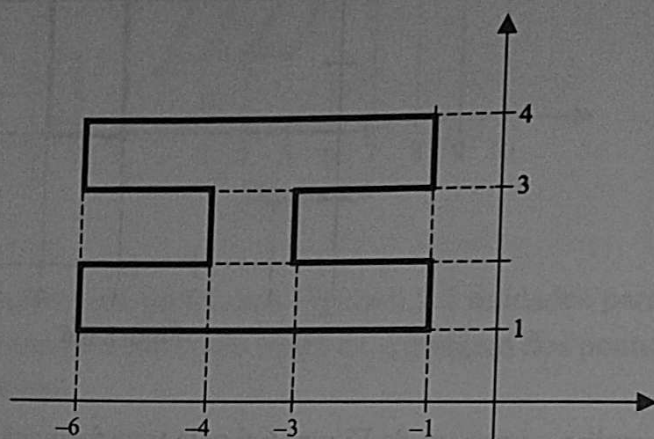


Figura 6.8

11. Para ampliar ou reduzir uma figura, usamos uma transformação do tipo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = \alpha(x, y)$ (homotetia de razão α). Determine a imagem da figura do exercício anterior pela transformação

$T(x, y) = \alpha(x, y)$ com $\alpha = -2$, isto é,

$T(x, y) = -2(x, y)$

Solução

A matriz canônica da homotetia é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \cdot I$$

e quando $\alpha = -2$, temos $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, a matriz formada pelas coordenadas dos pontos imagem da figura é:

$$\begin{aligned} A \cdot H &= -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -6 & -6 & -8 & -8 & -6 & -6 & -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -6 & -6 & -2 & -2 & -12 & -12 & -8 & -8 & -12 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e então a figura transformada é:

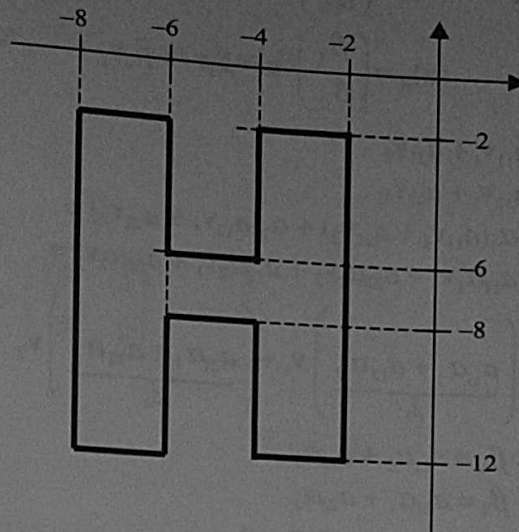


Figura 6.9

6.2 Matriz mudança de base

Seja U um espaço vetorial de dimensão n .

Para facilitar, vamos considerar $n = 2$, ou seja, $\dim U = 2$, mas vale para qualquer n .

Sejam $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bases de U ,

$$\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2.$$

Então, a matriz de mudança da base A para a base B é

$$I_B^A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sendo $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ base de U , se $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2$, então a matriz

$$(\mathbf{u})_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

é chamada **matriz coluna das coordenadas de $\mathbf{u}$ em relação à base A** .

Teorema 1 I_B^A é inversível, e a sua inversa $(I_B^A)^{-1}$ é igual a I_A^B , matriz de mudança de B para A .

Demonstração: Faça você.

Teorema 2 Seja

$$\mathbf{u} \in U \text{ e } (\mathbf{u})_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, (\mathbf{u})_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

matrizes coluna das coordenadas de $\mathbf{u}$ em relação às bases A e B respectivamente. Então

$$(\mathbf{u})_B = I_B^A \cdot (\mathbf{u})_A$$

Demonstração: $(\mathbf{u})_A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$

$$(\mathbf{u})_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2$$

mas, $\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{u}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$$

então, $\mathbf{u} = \alpha_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2) + \alpha_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2) =$

$$= a_{11}\alpha_1\mathbf{v}_1 + a_{21}\alpha_1\mathbf{v}_2 + a_{12}\alpha_2\mathbf{v}_1 + a_{22}\alpha_2\mathbf{v}_2 =$$

$$= \left(\underbrace{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2}_{\beta_1} \right) \mathbf{v}_1 + \left(\underbrace{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2}_{\beta_2} \right) \mathbf{v}_2$$

$$\therefore \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2$$

$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\mathbf{u})_B = I_B^A \cdot (\mathbf{u})_A \quad \text{c.q.d.}$$

Teorema 3 Sejam $T: U \rightarrow U$ um operador linear e A, B bases de U . Então:

$$(T)_B = (I_B^A)^{-1} \cdot (T)_A \cdot I_A^B$$

Nesse caso, $(T)_B$ e $(T)_A$ são ditas matrizes *semelhantes* e notadas $(T)_B \sim (T)_A$.

Lembrete:

Matrizes semelhantes:

$$(M \sim N \Leftrightarrow \exists P \text{ inversível, tal que } M = P^{-1} \cdot N \cdot P)$$

EXEMPLOS

1. Sejam $A = \{(4, -1), (-2, 2)\}$ e $B = \{(2, 0), (2, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$.

a. Calcule

$$I_B^A$$

(matriz de mudança de base de A para B).

b. Usando

$$I_B^A$$

e o Teorema 2, calcule $(\mathbf{v})_B$ sabendo que

$$(\mathbf{v})_A = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução

- a. $(4, -1) = a_{11}(2, 0) + a_{21}(2, 1)$
 $(-2, 2) = a_{12}(2, 0) + a_{22}(2, 1)$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 2a_{21} = 4 \Rightarrow 2a_{11} = 4 - 2(-1) \Rightarrow 2a_{11} = 6 \Rightarrow a_{11} = 3 \\ a_{21} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 2a_{22} = -2 \Rightarrow 2a_{12} = -2 - 4 \Rightarrow a_{12} = -3 \\ a_{22} = 2 \end{cases}$$

$$\therefore I_B^A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } (v)_B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (v)_B = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. Sejam $T(x, y) = (3x + 7y, 2x + y)$ um operador linear do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(2, 1), (-2, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$.
- Encontre $(T)_C = (T)$, em que C é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.
 - Determine também $(T)_B$ usando o Teorema 3.

Solução

$$T(1, 0) = (3, 2) \text{ e } T(0, 1) = (7, 1)$$

$$\therefore (T)_C = (T) = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2, 1) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1)$$

$$(-2, 1) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1)$$

$$\therefore I_C^B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1, 0) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(-2, 1)$$

$$(0, 1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}(-2, 1)$$

$$\begin{cases} 2a_{11} - 2a_{21} = 1 \\ a_{11} + a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} - 2a_{21} = 1 \\ 2a_{11} + 2a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$4a_{11} = 1 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{4}$$

da 2ª equação, temos: $a_{21} = -a_{11} \Rightarrow a_{21} = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} 2a_{12} - 2a_{22} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{12} - 2a_{22} = 0 \\ 2a_{12} + 2a_{22} = 2 \end{cases}$$

$$4a_{12} = 2 \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore I_B^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (I_C^B)^{-1}$$

Pelo Teorema 3: $(T)_B = (I_C^B)^{-1} \cdot (T)_C \cdot I_C^B$

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T)_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (T)_B = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-7}{4} \end{bmatrix}$$

Diagonalização

7.1 Valores próprios e vetores próprios

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq 0$ é **vetor próprio** (ou autovetor) se existe

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}.$$

O número real λ é dito **valor próprio** (ou autovalor) de T associado a $\mathbf{u}$.

Fixado λ , o conjunto $\{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\}$ é um subespaço vetorial de V .

De fato, $\{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\} = \{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{u} = 0\} = \{\mathbf{u} \in V \mid T(\mathbf{u}) - \lambda I(\mathbf{u}) = 0\} = \{\mathbf{u} \in V \mid (T - \lambda I)(\mathbf{u}) = 0\} = N(T - \lambda I)$, que é um subespaço vetorial de V .

Esse espaço é chamado **subespaço próprio de λ** .

Notação: $V(\lambda)$

Proposição $\mathbf{u}$ é vetor próprio $\Leftrightarrow \mathbf{u} \in N(T - \lambda I) \Leftrightarrow N(T - \lambda I) \neq \{0\} \Leftrightarrow T - \lambda I$ não é bijetor $\Leftrightarrow T - \lambda I$ não é inversível.

Dado um operador linear T , seja A sua matriz canônica, isto é, $A = (T)_C$, em que C é base canônica de V . Temos então que, se $T - \lambda I$ não é bijetor, o $\det(A - \lambda I_n) = 0$. O polinômio obtido, $\det(A - \lambda I_n)$, é denominado **polinômio característico** de A ou polinômio característico de T .

Notação: $p(\lambda)$

As raízes reais de $p(\lambda)$ são os **valores próprios** de T ou de A . Para se determinar os vetores próprios devemos calcular o produto $(A - \lambda I_n)(\mathbf{u}) = 0$, em que $(\mathbf{u})$ é a matriz coluna das coordenadas de $\mathbf{u}$ e $(A - \lambda I_n)$ é a matriz do operador linear $T - \lambda I$.

Assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

EXEMPLOS

Determine valores e vetores próprios de:

a. $T(x, y) = (y, x)$

Solução

Resolveremos este exercício de duas formas.

1ª forma:

$$\left. \begin{aligned} T(x, y) &= (y, x) \\ T(x, y) &= \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) = (y, x)$$

assim: $\begin{cases} \lambda x = y \Rightarrow \lambda(\lambda y) = y \Rightarrow \lambda^2 y = y \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \\ \lambda y = x \end{cases}$

Para $\lambda_1 = 1$, temos $x = y$

$\therefore$ vetores do tipo $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_1 = 1$.

Para $\lambda_2 = -1$, temos $-x = y$

$\therefore$ vetores do tipo $v_2 = (x, -x) = x(1, -1)$, $x \neq 0$, são vetores próprios associados a $\lambda_2 = -1$.

2ª forma: $T(x, y) = (y, x)$ tomemos $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canônica do $\mathbb{R}^2$

$$T(1, 0) = (0, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$$

$$\therefore A = [T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

(polinômio característico)

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Para $\lambda_1 = 1$, temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x & +y \\ x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

vetor próprio $(x, x) = x(1, 1) \therefore v_1 = (1, 1)$.

Para $\lambda_2 = -1$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

vetor próprio $(x, -x) = x(1, -1) \therefore v_2 = (1, -1)$

Resposta: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \rightarrow v_1 = (1, 1) \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow v_2 = (1, -1) \end{cases}$

b. $T(x, y) = (-y, x)$

$$T(1, 0) = (0, 1)$$

$$T(0, 1) = (-1, 0)$$

$$A = (T)_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, não tem raízes reais.

$\therefore$ não tem valores e vetores próprios.

c. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ (raiz dupla)}$$

Para $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \forall z \end{cases}$$

$$(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

$$\therefore \mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$$

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \\ \forall y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$$

$$\therefore \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$$

Logo:

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$$

d. $T(x, y) = (x + y, x - y)$

$$T(1, 0) = (1, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, -1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 1 = 0$$

$$-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{2}$$

Para

$$\lambda_1 = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

multiplicando a 1ª equação por $(1+\sqrt{2})$ vem:

$$\begin{cases} -x + (1+\sqrt{2})y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = (1+\sqrt{2})y$$

$$\underline{0 = 0}$$

$$\text{assim } ((1+\sqrt{2})y, y) = y((1+\sqrt{2}), 1)$$

$$\therefore v_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$$

Para

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

multiplicando a 1ª equação por $(1-\sqrt{2})$ vem:

$$\begin{cases} (1-2)x + (1-\sqrt{2})y = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + (1-\sqrt{2})y = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$$\underline{0 = 0} \Rightarrow x = (1-\sqrt{2})y$$

$$\text{assim } ((1-\sqrt{2})y, y) = y((1-\sqrt{2}), 1)$$

$$\therefore v_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$$

Resposta:

$$\text{e. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

Para $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

daí, $x = y$ e $z = 0$

$$(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$$

$$\therefore \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$$

Para $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -x = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

daí, $x = 0$ e $y = -z$

$$(0, -z, z) = z(0, -1, 1)$$

$$\therefore \mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$$

Para $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

daí, $x = y = 0$ e z qualquer

$$(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

$$\therefore \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \rightarrow \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0) \\ \lambda_2 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_2 = (0, -1, 1) \\ \lambda_3 = 2 \rightarrow \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

7.2 Diagonalização

Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ operador linear. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores próprios de T (não necessariamente distintos).

Se existe uma base de $\mathbb{R}^n$, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ formada pelos correspondentes vetores próprios, temos:

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\
 T(\mathbf{v}_2) &= \lambda_2 \mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_n \\
 &\vdots \\
 T(\mathbf{v}_n) &= \lambda_n \mathbf{v}_n = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n
 \end{aligned}$$

$$e(T)_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = D \text{ (matriz diagonal)}$$

Nesse caso, se (T) é a matriz canônica de T , pelo Teorema 3 (mudança de base) temos:

$$(T)_B = D = M^{-1} \cdot (T) \cdot M$$

em que M é a matriz de mudança de base de B para a canônica (obtida pondo como colunas os vetores da base B). Segue que (T) é *semelhante* à matriz diagonal $(T)_B = D$.

Dizemos então que T (ou a matriz (T)) é **diagonalizável**, e que M (que não é única) diagonaliza T ou a matriz (T) .

Dado um operador linear T (ou uma matriz (T)), o único caso em que há garantia de diagonalização é quando T (ou uma matriz (T)) possui n valores próprios *distintos* (Teorema). Nos outros casos temos que calcular os valores próprios e vetores próprios correspondentes e verificar se há ou não uma base de $\mathbb{R}^n$ formada pelos vetores próprios de T (ou da matriz (T)).

EXEMPLOS

Verifique quais matrizes são diagonalizáveis, explicando sua resposta. Para as que forem diagonalizáveis, encontre as matrizes M e D tais que $M^{-1} \cdot A \cdot M = D$.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot (6-\lambda) = 0$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

são os valores próprios e, como são distintos, temos que A é diagonalizável. Para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e daí:

$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ 3x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow -3y + 3y + 4z = 0 \Rightarrow 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

$(-y, y, 0) = y(-1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$ é vetor próprio.

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e daí

$$\begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \Rightarrow 3y + 3z = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

$(0, -z, z) = z(0, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$ é vetor próprio.

Para $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e daí

$$\begin{cases} -4x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y \Rightarrow y = 0 \quad \forall z \\ 3x + 3y = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ é vetor próprio

$$\text{Assim} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0) \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (0, -1, 1) \\ \lambda_3 = 6 \Rightarrow \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$\therefore M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (4-\lambda) + 2 \cdot (2-\lambda) = \\ &= (2-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (4-\lambda) + 2] = 0 \Rightarrow (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \\ &= 0 \Rightarrow (2-\lambda) \cdot (\lambda-2) \cdot (\lambda-3) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (raiz dupla)} \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e daí

$$\begin{cases} 0x - 0y + 0z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -y + 2z = 0 \Rightarrow y = 2z \end{cases}$$

$(0, 2z, z) = z(0, 2, 1)$ e $\mathbf{v}_1 = (0, 2, 1)$ é vetor próprio.

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e daí

$$\begin{cases} -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \Rightarrow y = z \end{cases}$$

$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)$ é vetor próprio.

$\lambda_1 = 2$ (raiz dupla) $\rightarrow \mathbf{v}_1 = (0, 2, 1)$

$\lambda_2 = 3$ (raiz simples) $\rightarrow \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$

Só conseguimos 2 vetores próprios LI, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\nexists$ base do $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A . Portanto, A não é diagonalizável.

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ (raiz dupla)} \\ \lambda_2 = 2 \text{ (raiz simples)} \end{cases}$$

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z, \forall x \end{cases}$$

$$(x, -z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, -1, 1)$$

$\therefore v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 1)$ são vetores próprios.

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0, \forall z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$$

$\therefore v_3 = (0, 0, 1)$ é vetor próprio

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow v_1 = (1, 0, 0) \text{ e } v_2 = (0, -1, 1)$$

$$\lambda_2 = 2 \rightarrow v_3 = (0, 0, 1)$$

Assim, $\{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ é base de vetores próprios, portanto, A é diagonalizável

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Produto interno

Introdução

No Capítulo 3 definimos um *espaço vetorial real* como um conjunto V (digamos, um conjunto de “objetos matemáticos” denominados *vetores*) munido de duas operações, a saber: a adição de vetores e a multiplicação de um número real por um vetor, sendo que cada uma dessas operações satisfaz quatro propriedades (axiomas). Como primeiro exemplo de tal estrutura, mencionamos o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), com as operações usuais de adição e produto de números.

De um certo ponto de vista, podemos dizer que espaços vetoriais são generalizações ou extensões de conjuntos numéricos (e de operações concernentes), de modo que as operações satisfaçam algumas propriedades (ou axiomas) análogas àquelas que estabelecemos no nosso trato com números.

Nesse sentido vamos definir, para um espaço vetorial real, uma terceira operação, que satisfaz um número “mínimo” de axiomas, os quais são formalmente semelhantes a alguns daqueles que admitimos para o produto de números (e sua relação com a adição). Como veremos, uma característica notável dessa operação é estabelecer uma ponte entre elementos vetoriais e números reais, o que nos elucidará certos aspectos dos primeiros através desses últimos.

3.1 Produto interno

Definição Seja V um espaço vetorial. Denomina-se **produto interno em V** uma função definida em $V \times V$ e com valores reais, que a cada par de vetores $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V \times V$ associa um número real, único, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (ou $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$), e que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$P_1) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$P_2) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$P_3) (\alpha \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$P_4) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \text{ e } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ (0 denota o vetor nulo de } V)$$

Observações:

1. Identificando o nome da operação (função) com o resultado da mesma, denominamos o número real $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ **produto interno** dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
2. Por simplicidade, empregaremos somente a notação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

3. Usando os quatro axiomas da definição, o leitor interessado poderá provar as seguintes propriedades, que eventualmente utilizaremos:

- (i) $0 \cdot u = u \cdot 0 = 0, \forall u \in V$ (0 é o vetor nulo de V)
- (ii) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w, \forall u, v, w \in V$
- (iii) $u \cdot (\alpha v) = \alpha (u \cdot v), \forall u, v \in V; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (iv) $u \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = u \cdot v_1 + u \cdot v_2 + \dots + u \cdot v_n, \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V; n = 3, 4, \dots$

4. Dado o caráter sucinto deste texto, limitaremos nosso estudo aos espaços $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), e, embora haja muitas possíveis definições de “produtos” em $\mathbb{R}^n$ que verificam os axiomas apresentados, vamos, por uma questão de simplicidade, nos ater à definição mais usual, em cada caso.

EXEMPLOS

1. No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, a função que associa a cada par de vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o número real $u \cdot v$ dado $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2$ é um produto interno.

Mostremos que, com essa definição, são verificados os quatro axiomas concernentes ao produto interno.

Solução

$$P_1) u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$v \cdot u = x_2 x_1 + y_2 y_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\text{Portanto } u \cdot v = v \cdot u$$

$$P_2) \text{ Sendo } w = (x_3, y_3), \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} u \cdot (v + w) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= x_1 (x_2 + x_3) + y_1 (y_2 + y_3) = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u \cdot v + u \cdot w &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 x_3 + y_1 y_3 = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

$$P_3) (\alpha u) \cdot v = (\alpha x_1, \alpha y_1) \cdot (x_2, y_2) = \alpha x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2$$

$$\alpha (u \cdot v) = \alpha (x_1 x_2 + y_1 y_2) = \alpha x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2$$

$$\text{Portanto, } (\alpha u) \cdot v = \alpha (u \cdot v)$$

$$P_4) u \cdot u = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2 \geq 0$$

$$u \cdot u = 0 \text{ se e somente se } x_1^2 + y_1^2 = 0 \text{ se e somente se } x_1 = y_1 = 0 \text{ se e somente se } u = (0, 0) = 0 \text{ (vetor nulo do } \mathbb{R}^2)$$

2. Se $V = \mathbb{R}^3$ e $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, então o produto interno (produto escalar) usual é definido por: $u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Solução

(Demonstrações análogas às do Exemplo 1)

3. Se $V = \mathbb{R}^n$, e $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então o produto interno usual é definido por:

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Solução

(Demonstrações análogas às do Exemplo 1)

Veremos agora como a partir do produto interno podemos generalizar as noções de comprimento e distância. Isso nos leva ao próximo item, que iniciamos com a nomenclatura.

8.2 Espaços vetoriais euclidianos

Um espaço vetorial real, no qual está definido um produto interno, é determinado um *espaço vetorial euclidiano*. Neste capítulo só trabalharemos com *espaços vetoriais euclidianos*, portanto, quando for mencionado “espaço vetorial”, leia-se implicitamente “euclidiano”.

8.3 Norma de um vetor

Seja V um espaço vetorial e $v \in V$.

Definição Denominamos norma (módulo, comprimento) de v o número real, denotado por

$$\|v\| \text{ definido por } \|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Observações:

1. Em alguns textos, usa-se a notação $|v|$, barra simples, tanto para indicar módulo (valor absoluto) de um número real como para norma de um vetor.
2. Do axioma P_4 , segue que

$$\|v\| \geq 0, \forall v \in V, \text{ e } \|v\| = 0 \text{ se e somente se } v = 0 \text{ (vetor nulo de } V).$$

3. Se $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, então

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Na representação geométrica do $\mathbb{R}^3$, esse número expressa o comprimento de um segmento orientado com origem no sistema ortogonal de coordenadas do espaço e extremo no ponto $P = (x, y, z)$; esse segmento orientado representa o vetor u .

4. Se

$$\|v\| = 1,$$

o vetor v é denominado **vetor unitário**, e dizemos que v está normalizado.

5. Dado um vetor $v \neq 0$ (portanto $\|v\| > 0$),

vamos definir o vetor v_1 por $v_1 = \frac{1}{\|v\|} v$.

$$\text{Então: } v_1 \cdot v_1 = \left(\frac{1}{\|v\|} v \right) \cdot \left(\frac{1}{\|v\|} v \right) = \left(\frac{1}{\|v\|^2} (v \cdot v) \right) = 1,$$

ou seja, a partir de um vetor $v \neq 0$, podemos obter um vetor v_1 unitário (normalizado).

Propriedades da norma de um vetor:

valem:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(i) $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$

Demonstração:

$$\|\alpha \mathbf{v}\| = \sqrt{(\alpha \mathbf{v}) \cdot (\alpha \mathbf{v})} = \sqrt{\alpha^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$$

(ii) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$

(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Demonstração:

a. Se $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |0| = 0$

$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = \|0\| \cdot \|0\| = 0, \text{ ou seja, } |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = 0$$

b. Se $\mathbf{u} \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq 0$, consideremos a desigualdade

$$(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \geq 0, \text{ que, pelo axioma } P_4, \text{ vale para } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Desenvolvendo a expressão anterior, obtemos, em virtude dos axiomas:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\lambda + \lambda^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \geq 0, \text{ ou, com a definição de norma de um vetor:}$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 \lambda^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\lambda + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0.$$

O lado esquerdo dessa desigualdade é um trinômio do 2º grau na variável λ (pois de $\mathbf{v} \neq 0$, decorre $\|\mathbf{v}\|^2 > 0$). Sendo o coeficiente de λ^2 positivo, para que o trinômio seja sempre não-negativo é necessário que o seu discriminante seja sempre não-positivo:

$$[2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \leq 0$$

$$4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \leq 0$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{u}\|^2.$$

Extraindo a raiz quadrada positiva, obtemos:

$$|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|, \text{ pois } \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$$

(iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Demonstração:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

quadrando temos:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

sendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ [Cauchy-Schwarz]

$$\text{vem: } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$\text{ou } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

$$\text{ou } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Extraindo a raiz quadrada positiva, vem

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

8.4 Distância entre dois vetores

Sejam dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in V$.

A **distância** entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, é, por definição, o número real

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Observações:

1. Na representação usual nos números reais por pontos da reta real, $|x|$ (módulo ou valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$) pode ser interpretado como a distância entre o ponto que representa x e o ponto que representa 0.

Se $x, y \in \mathbb{R}$, então $d(x, y) = |x - y|$ traduz a distância entre os pontos da reta que representam x e y , respectivamente.

2. Se $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned}$$

que representa a distância entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ do plano cartesiano.

8.5 Ângulo entre dois vetores

Consideremos dois vetores *não-nulos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos, então

$$\|\mathbf{u}\| > 0 \text{ e } \|\mathbf{v}\| > 0 \text{ e,}$$

nesse caso, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|, \text{ segue } \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1, \text{ ou } \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right| \leq 1, \text{ o que equivale a } -1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Podemos então dizer que

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

pertence ao domínio da função arccos, ou seja, existe um ângulo θ , $\theta \in [0, \pi]$, tal que

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right).$$

O ângulo θ é denominado *ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$* .

Notação: $\text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ou $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Usualmente, em vez da relação anterior, escrevemos

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \text{ ou ainda, } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta, \text{ com } 0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$$

Observação: Nos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, munidos com o produto interno usual, também podemos definir o ângulo entre dois vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como o *menor* ângulo entre dois representantes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (segmentos orientados) com a mesma origem. (As condições da definição acarretam

$$0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad.})$$

Definido assim o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, pode-se provar que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \text{ ou } \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

como uma propriedade do produto interno. Vemos então que a definição de ângulo entre vetores de um espaço vetorial V em termos do produto interno estende a noção geométrica de ângulo a espaços vetoriais não-representáveis geometricamente.

EXEMPLOS

1. Sendo V um espaço vetorial, prove que:

- $\|-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in V$
- $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

Solução

- $\|-\mathbf{u}\| = \sqrt{(-\mathbf{u}) \cdot (-\mathbf{u})} = \sqrt{(-1) \cdot (-1) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \|\mathbf{u}\|$
- $\|\mathbf{u}\| = \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$, por iii), segue que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$ (1)

Também de (1) vem:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| = -(\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|)$$

$$\text{de (a): } \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|-(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \text{ logo: } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq -(\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|) \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

2. Prove que, para quaisquer números reais $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, vale:

$$(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

Solução

Consideremos os vetores do $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2)| &\leq \|(x_1, y_1, z_1)\| \cdot \|(x_2, y_2, z_2)\| \\ |x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2| &\leq \sqrt{(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_1, y_1, z_1)} \sqrt{(x_2, y_2, z_2) \cdot (x_2, y_2, z_2)} \\ |x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2| &\leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} \end{aligned}$$

quadrando temos:

$$(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

3. Calcule o ângulo θ entre os vetores

- do $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{u} = (1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 0)$
- do $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$
- do $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{u} = (-1, 2, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 1)$

Solução

$$\text{a. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 1) \cdot (1, 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{(1, 1) \cdot (1, 1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(1, 0) \cdot (1, 0)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{logo: } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\text{b. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 0, -1) \cdot (1, 1, 0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{logo: } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\text{c. } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 2, 0, 1) \cdot (0, 1, 1, 1) = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{(-1, 2, 0, 1) \cdot (-1, 2, 0, 1)} = \sqrt{(-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(0, 1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1, 1)} = \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{logo: } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

4. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tal que

$$\|\mathbf{u}\| = 2, \|\mathbf{v}\| = 6, \theta = \hat{\text{ang}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Calcule: a. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v})$

b. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

c. $\|3\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

d. $\alpha = \hat{\text{ang}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}, 3\mathbf{u} - \mathbf{v})$

Solução

$$\begin{aligned} \text{a. } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (3\mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}) = \\ &= 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \end{aligned}$$

$$= 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} =$$

$$= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \frac{\pi}{3} - 2\|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 6^2 = -12$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &= \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \frac{\pi}{3} + \|\mathbf{v}\|^2} = \\ &= \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 36} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \|3\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \sqrt{(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v})} = \sqrt{9\|\mathbf{u}\|^2 - 6\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2} = \\ &= \sqrt{9\|\mathbf{u}\|^2 - 6\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \frac{\pi}{3} + \|\mathbf{v}\|^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + 36} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \cos \alpha &= \frac{(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \cdot \|3\mathbf{u} - \mathbf{v}\|} = \frac{-12}{2\sqrt{13} \cdot 6} = -\frac{\sqrt{13}}{13} \\ \text{logo: } \alpha &= \arccos\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right) \end{aligned}$$

5. Sendo $\mathbf{u} = (2, 3, a)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$, calcule a para que a distância entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ seja 3.

Solução

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 3$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})} = \\ &= \sqrt{(1, 2, a-1) \cdot (1, 2, a-1)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (a-1)^2} = 3 \end{aligned}$$

Assim:

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + (a-1)^2} = 3$$

$$\sqrt{1 + 4 + a^2 - 2a + 1} = 3$$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 6} = 3 \quad \text{quadrando:}$$

$$a^2 - 2a + 6 = 9, \text{ ou, } a^2 - 2a - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos: $a = -1$ ou $a = 3$. ■

8.6 Vetores ortogonais

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores pertencentes a um espaço vetorial V .

Definição Dizemos que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* se e somente se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Notação: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

Observações:

1. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ é o vetor nulo de V), então

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \quad \theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad 0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}.$$

Segue-se que:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}, \text{ se e só se,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (90^\circ)$$

Vemos então que a definição de vetores ortogonais generaliza a noção de perpendicularidade e ortogonalidade da geometria plana, a qual sempre está associada ao ângulo reto.

2. Como $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \in V$, temos que o vetor nulo $\mathbf{0}$ de V é ortogonal a qualquer vetor de V .
3. Se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, então

$$\alpha \mathbf{u} \perp \beta \mathbf{v}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: $(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\beta \mathbf{v}) = (\alpha \beta) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

Logo, se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, assim

$$(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\beta \mathbf{v}) = (\alpha \beta) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

isto é, $(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\beta \mathbf{v}) = 0$, portanto,

$$(\alpha \mathbf{u}) \perp (\beta \mathbf{v}).$$

4. Se $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, então $\mathbf{w} \perp (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

Demonstração: Pelas propriedades, temos: $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$, como $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ segue-se que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Logo $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 + 0 = 0$, isto é, $\mathbf{w} \perp (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

EXEMPLO

Os vetores $\mathbf{u} = (4, -3, 2), \mathbf{v} = (3, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$ são ortogonais, pois:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4, -3, 2) \cdot (3, 2, -3) = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 12 - 6 - 6 = 0.$$

8.7 Conjunto ortogonal de vetores

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V (n \geq 2)$

Definição Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é *ortogonal*, se e somente se os vetores são dois a dois ortogonais, isto é, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

EXEMPLOS

1. Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto $\{(3, -2), (2, 3)\}$ é ortogonal, pois:

$$(3, -2) \cdot (2, 3) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

2. Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(2, 1, 3), (1, 1, -1), (-4, 5, 1)\}$ é ortogonal, pois:
- $$(2, 1, 3) \cdot (1, 1, -1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$
- $$(2, 1, 3) \cdot (-4, 5, 1) = 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = -8 + 5 + 3 = 0$$
- $$(1, 1, -1) \cdot (-4, 5, 1) = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 = -4 + 5 - 1 = 0$$

O teorema a seguir mostra que a “ortogonalidade” acarreta a “independência linear” (os conceitos de dependência e independência linear, bases e dimensão de espaços vetoriais foram abordados no Capítulo 4).

Teorema Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, ($n \geq 2$) é um conjunto *ortogonal* de vetores *não-nulos*, então S é linearmente independente (LI).

Demonstração: Por absurdo, suponhamos que S seja linearmente dependente (Capítulo 4), isto é, pelo menos um dos vetores de S é combinação linear dos restantes vetores de S ; por simplicidade, consideremos v_1 esse vetor. Então:

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in \mathbb{R}, 2 \leq i \leq n.$$

Fazendo o produto interno dessa equação por v_1 , vem:

$$v_1 \cdot v_1 = (\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n) \cdot v_1$$

ou

$$\|v_1\|^2 = \alpha_2(v_2 \cdot v_1) + \alpha_3(v_3 \cdot v_1) + \dots + \alpha_n(v_n \cdot v_1)$$

Sendo S ortogonal, temos:

$$v_2 \cdot v_1 = v_3 \cdot v_1 = \dots = v_n \cdot v_1 = 0, \text{ logo}$$

$$\|v_1\|^2 = 0,$$

e portanto $v_1 = 0$.

Absurdo contra a hipótese (os vetores de S são não-nulos). Segue-se que S é linearmente independente (LI).

8.8 Base ortogonal

Dizemos que uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é *ortogonal* se e somente se o conjunto B é *ortogonal*.

Pelo teorema anterior, se $\dim V = n$ (ver Capítulo 4), então qualquer subconjunto de V *ortogonal* com n vetores *não-nulos* é uma base ortogonal de V .

8.9 Base ortonormal

Dizemos que uma base ortogonal $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é *ortonormal* se os seus vetores são todos unitários.

Resumindo: $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é *base ortonormal* de V se e somente se:

- a. $v_i \cdot v_j = 0$, se $i \neq j$
- b. $v_i \cdot v_j = 1$, se $i = j$

Observação: Como já vimos, se $v \in V$ e $v \neq 0$, podemos construir o vetor

$$\frac{v}{\|v\|},$$

o qual é unitário. Dizemos nesse caso que o vetor

$$\frac{v}{\|v\|}$$

está *normalizado*, ou também que normalizamos o vetor v . Portanto, a partir de uma base ortogonal $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , sempre podemos obter uma base ortonormal, normalizando cada vetor de B , assim

$$B' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}.$$

8.10 Coordenadas de um vetor numa base ortogonal

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de um espaço vetorial V , e seja $v \in V$.

Expressando v na base B , vem:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n, \text{ sendo } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

as coordenadas de v na base B .

Efetuada o produto interno por v_i , temos:

$$v \cdot v_i = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n) \cdot v_i$$

$$v \cdot v_i = \alpha_1 (v_1 \cdot v_i) + \alpha_2 (v_2 \cdot v_i) + \dots + \alpha_i (v_i \cdot v_i) + \dots + \alpha_n (v_n \cdot v_i).$$

Sendo B ortogonal, vem:

$$v_1 \cdot v_i = v_2 \cdot v_i = \dots = v_n \cdot v_i = 0$$

e

$$v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2$$

Logo:

$$v \cdot v_i = \alpha_i \|v_i\|^2, \text{ ou seja, } \alpha_i = v \cdot \frac{v_i}{\|v_i\|^2}$$

Se, em particular, B é base ortonormal,

$$\|v_i\| = 1, \text{ e temos: } \alpha_i = v \cdot v_i.$$

EXEMPLOS

- Conforme vimos no Exemplo 1 de conjuntos ortogonais, o conjunto $B = \{(3, -2), (2, 3)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^2$.
Sendo

$$\|(3, -2)\| = \sqrt{13} \text{ e } \|(2, 3)\| = \sqrt{13},$$

a base ortonormal correspondente a B será:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} (3, -2), \frac{1}{\sqrt{13}} (2, 3) \right\}$$

2. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ (verifique), denominada **base canônica** do $\mathbb{R}^2$.
3. Conforme o Exemplo 2 de conjuntos ortogonais, temos que $B = \{(2, 1, 3), (1, 1, -1), (-4, 5, 1)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$.

Sendo

$$\|(2, 1, 3)\| = \sqrt{14}, \|(1, 1, -1)\| = \sqrt{3}, \|(-4, 5, 1)\| = \sqrt{42},$$

a base ortonormal correspondente a B será:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{42}}(-4, 5, 1) \right\}$$

4. Em relação ao Exemplo 3, as coordenadas do vetor $v = (-1, 3, 2)$ na base B serão:

$$1^{\text{a}} \text{ coordenada} = v \cdot \frac{(2, 1, 3)}{\sqrt{14}} = \frac{(-1, 3, 2) \cdot (2, 1, 3)}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$2^{\text{a}} \text{ coordenada} = v \cdot \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} = \frac{(-1, 3, 2) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{3}} = 0$$

$$3^{\text{a}} \text{ coordenada} = v \cdot \frac{(-4, 5, 1)}{\sqrt{42}} = \frac{(-1, 3, 2) \cdot (-4, 5, 1)}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

5. A base $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ (verifique), e é denominada **base canônica** do $\mathbb{R}^3$. ■

8.11 Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Sendo $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base qualquer (não-ortogonal) de um espaço vetorial V , sempre podemos, a partir de B , construir uma base ortogonal $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de V .

Vamos descrever um método para tal, denominado método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Fazendo $u_1 = v_1$, queremos calcular

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

Para que o vetor $u_2 = v_2 - \alpha u_1$ seja ortogonal a u_1 devemos ter $u_2 \cdot u_1 = 0$, assim:

$$(v_2 - \alpha u_1) \cdot u_1 = 0, \text{ isto é, } v_2 \cdot u_1 - \alpha (u_1 \cdot u_1) = 0, \text{ daí}$$

$$\alpha = \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$$

Portanto, o vetor

$$u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) u_1$$

é ortogonal a u_1 .

Consideremos o vetor $u_3 = v_3 - \alpha_2 u_2 - \alpha_1 u_1$. Calculemos

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

para que o vetor u_3 seja ortogonal aos vetores u_1 e u_2 , isto é, $u_3 \cdot u_1 = 0$ e $u_3 \cdot u_2 = 0$;

$$a) (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \alpha_1 \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 = 0$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1 - \alpha_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1) - \alpha_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = 0$$

sendo $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0$, pois $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$, temos:

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}$$

$$b) (\mathbf{v}_3 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \alpha_1 \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2 - \alpha_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) - \alpha_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) = 0$$

sendo $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = 0$, pois $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$, temos:

$$\alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}$$

Portanto, o vetor

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \mathbf{u}_2$$

é ortogonal aos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, e os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são dois a dois ortogonais. Prosseguindo, obtemos:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} - \dots - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \alpha_1 \mathbf{u}_1,$$

$$\text{sendo } \alpha_{n-1} = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}}{\mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_{n-1}}, \dots, \alpha_2 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}, \alpha_1 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}, \text{ com } \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1,$$

$$\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n.$$

A base ortogonal $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ foi obtida a partir da base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ por esse método, o qual é conhecido como *método de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

A base ortonormal correspondente é:

$$B'' = \left\{ \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \dots, \frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|} \right\}$$

EXEMPLO

Seja $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$, o conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base não-ortogonal do $\mathbb{R}^3$ (verifique).

Solução

Vamos aplicar o método apresentado para obter, a partir de B , uma base ortogonal $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e depois a base ortonormal correspondente B'' .

Iniciamos com $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \cdot \mathbf{u}_1 = (1, 0, 1) - \left(\frac{(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} \right) \cdot (1, 1, 1) = \\ &= (1, 0, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 1, 1), \text{ ou } \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} \right) \cdot \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \cdot \mathbf{u}_1$$

$$\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} = \frac{\left((1, 1, 0) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)}{\left(\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} = \frac{\left((1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1) \right)}{\left((1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) \right)} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0) - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{2}{3} \right) (1, 1, 1), \text{ ou } \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

E a base ortogonal é: $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, sendo $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$,

$$\mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

Calculando as normas de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3}, \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{u}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A base ortonormal B'' será:

$$B'' = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} (1, 1, 1), \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

8.12 Conjuntos ortogonais

Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial V .

Definição Dizemos que S_1 e S_2 são ortogonais e denotamos $S_1 \perp S_2$ se qualquer vetor de S_1 é ortogonal a qualquer vetor de S_2 :

$$\forall \mathbf{v}_1 \in S_1, \forall \mathbf{v}_2 \in S_2, \text{ temos } \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2.$$

EXEMPLOS

1. $S_1 = \{(3, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ e $S_2 = \{(3, -5, 1), (6, -10, 2)\}$ são subconjuntos ortogonais do $\mathbb{R}^3$, pois:

$$(3, 2, 1) \cdot (3, -5, 1) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 = 9 - 10 + 1 = 0$$

$$(3, 2, 1) \cdot (6, -10, 2) = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-10) + 1 \cdot 2 = 18 - 20 + 2 = 0$$

$$(1, 1, 2) \cdot (3, -5, 1) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 = 3 - 5 + 2 = 0$$

$$(1, 1, 2) \cdot (6, -10, 2) = 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-10) + 2 \cdot 2 = 6 - 10 + 4 = 0$$

2. $S_1 = \{(x, 0, z, 0)\}$ e $S_2 = \{(0, y, 0, t)\}$ são subconjuntos ortogonais do $\mathbb{R}^4$, pois:

$$(x, 0, z, 0) \cdot (0, y, 0, t) = x \cdot 0 + 0 \cdot y + z \cdot 0 + 0 \cdot t = 0, \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Seja V um espaço vetorial, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ uma base do subespaço $S \in V$, gerado por B (isto é, $S = [B]$).

Teorema Se um vetor $\mathbf{u} \in V$ é ortogonal a qualquer vetor da base B , então $\mathbf{u}$ é ortogonal a qualquer vetor de S .

Demonstração:

$$\forall \mathbf{v} \in S, \text{ temos } \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k,$$

pois B é base de S .

Fazendo o produto interno dessa equação por $\mathbf{u}$, vem:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1) + \alpha_2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2) + \dots + \alpha_k (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k)$$

Da hipótese, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = 0$,

$$1 \leq i \leq k.$$

Logo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ou seja, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Observação: Dizemos que $\mathbf{u}$ é ortogonal a S e escrevemos $\mathbf{u} \perp S$.

8.13 Complemento ortogonal

Seja S um subespaço vetorial de um espaço vetorial V , e consideremos o subconjunto de V formado pelos vetores ortogonais a S :

$$S^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp S\}$$

é denominado *complemento ortogonal* de S .

Teorema $S^\perp$ é subespaço vetorial de V .

Demonstração:

1. Sejam

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S^\perp.$$

Então, $\forall \mathbf{u} \in S$, temos: $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{u}$, ou seja, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = 0$.
Segue-se que:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 = 0, \text{ logo } \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in S^\perp.$$

2. Sejam $\mathbf{v} \in S^\perp, \alpha \in \mathbb{R}$

Como $\mathbf{v} \in S^\perp$, então $\forall \mathbf{u} \in S, \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, ou $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Logo: $(\alpha \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \alpha (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot 0 = 0$, ou seja, $\alpha \mathbf{v} \in S^\perp$.

Teorema V é a soma direta de S e $S^\perp$, isto é, $V = S \oplus S^\perp$.

Demonstração:

Provemos que: a. $V = S + S^\perp$

$$\text{b. } S \cap S^\perp = \{0\}$$

a. Seja um vetor v qualquer de V .

Sendo S um subespaço de V , consideremos $B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma *base ortonormal* de S .

Considerando os números reais $v \cdot u_1, v \cdot u_2, \dots, v \cdot u_k$, temos que o vetor $v_1 = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_k)u_k \in S$.

Denominando $v_2 = v - v_1$, provemos que $v_2 \perp S$, isto é, $v_2 \in S^\perp$.

Para isso, consideremos $v_2 \cdot u_i$,

$$1 \leq i \leq k$$

$$\begin{aligned} v_2 \cdot u_i &= (v - v_1) \cdot u_i = v \cdot u_i - v_1 \cdot u_i = \\ &= v \cdot u_i - [(v \cdot u_1)u_1 + \dots + (v \cdot u_i)u_i + \dots + (v \cdot u_k)u_k] \cdot u_i = \\ &= v \cdot u_i - (v \cdot u_1)(u_1 \cdot u_i) - \dots - (v \cdot u_i)(u_i \cdot u_i) - \dots - (v \cdot u_k)(u_k \cdot u_i) = \\ &= v \cdot u_i - (v \cdot u_1)0 - \dots - (v \cdot u_i)1^2 - \dots - (v \cdot u_k)0 = \\ &= v \cdot u_i - (v \cdot u_i) = 0 \end{aligned}$$

Logo, $v_2 \cdot u_i = 0$, ou, $v_2 \perp u_i$,

$$\forall i, 1 \leq i \leq k.$$

Então v_2 é ortogonal a qualquer vetor da base B e, pelo teorema, $v_2 \perp S$, isto é, $v_2 \in S^\perp$.

Então, $\forall v \in V$, $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in S$, $v_2 \in S^\perp$, portanto, $V = S + S^\perp$.

b. (i) se $S = \{0\}$, então, $S \cap S^\perp = \{0\}$.

(ii) seja $S \neq \{0\}$.

Então, $\forall v \in S \cap S^\perp$, temos $v \cdot v = 0$, ou seja, $v = 0$ e $S \cap S^\perp = \{0\}$.

EXEMPLOS

1. Consideremos o subespaço do $\mathbb{R}^2$, $S = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Então: } S^\perp = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{De fato: } (0, y) \cdot (x, 0) = 0 \cdot x + y \cdot 0 = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Consideremos o subespaço do $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Então: } S^\perp = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}$$

De fato:

$$(0, y, 0) \cdot (x, 0, z) = 0 \cdot x + y \cdot 0 + 0 \cdot z = 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

3. Consideremos o subespaço do $\mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Então: } S^\perp = \{(0, a, -a) | a \in \mathbb{R}\}$$

De fato:

$$(0, a, -a) \cdot (x, y, y) = 0 \cdot x + a \cdot y + (-a) \cdot y = 0, \forall x, y, a \in \mathbb{R}$$

8.14 Exercícios resolvidos

1. Sendo $u = (a, -3, 1, 2)$ e $v = (3, -2, -1, 5)$ vetores do $\mathbb{R}^4$, calcule a para que eles sejam ortogonais.

Solução

$u \perp v$ significa $u \cdot v = 0$

$$u \cdot v = (a, -3, 1, 2) \cdot (3, -2, -1, 5) = 0$$

$$\begin{aligned}
 a \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 &= 0 \\
 3a + 6 - 1 + 10 &= 0 \\
 3a + 15 &= 0
 \end{aligned}$$

$$a = -5$$

2. Considerando em $\mathbb{R}^3$ os vetores $u = (a, b, -2)$, $v = (1, -2, 3)$ e $w = (3, 1, 2)$, calcule a e b para que u seja ortogonal a v e a w .

Solução

$u \perp v$ significa $u \cdot v = 0$

$u \perp w$ significa $u \cdot w = 0$

$u \cdot v = (a, b, -2) \cdot (1, -2, 3) = a - 2b - 6 = 0$, isto é, $a - 2b = 6$

$u \cdot w = (a, b, -2) \cdot (3, 1, 2) = 3a + b - 4 = 0$, isto é, $3a + b = 4$

Obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} a - 2b = 6 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 2$ e $b = -2$ (verifique).

3. Em $\mathbb{R}^2$, determine o vetor $u = (a, b)$ tal que u tenha norma

$$2\sqrt{5}$$

e seja ortogonal ao vetor $v = (1, -2)$.

Solução

$$\|u\| = 2\sqrt{5}$$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{isto é, } \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{quadrando temos: } a^2 + b^2 = 20 \quad (1)$$

$$u \perp v \text{ significa } u \cdot v = 0$$

$$(a, b) \cdot (1, -2) = a - 2b = 0, \text{ ou } a = 2b \quad (2)$$

$$\text{Levando (2) em (1), temos: } (2b)^2 + b^2 = 20$$

$$4b^2 + b^2 = 20, \text{ isto é, } 5b^2 = 20, \text{ logo } b^2 = 4, \text{ cujas soluções são: } b_1 = 2 \text{ e } b_2 = -2.$$

Levando cada solução em (2):

para $b = -2$ temos $a = -4$, que fornece $u = (-4, -2)$;

para $b = 2$ temos $a = 4$, que fornece $u = (4, 2)$.

4. Determine uma base ortonormal do subespaço do $\mathbb{R}^3$,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + 2y\}$$

Solução

Obtemos primeiramente uma base B de V (conforme o Capítulo 4), depois obtemos, a partir de B , uma base ortogonal (método de ortogonalização de Gram-Schmidt) e a base ortonormal correspondente (através de normalização).

Reescrevendo V , temos $V = \{(x, y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Para um vetor qualquer de V :

$$(x, y, x + 2y) = (x, 0, x) + (0, y, 2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2).$$

Então, $V = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ e, sendo $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$ LI (verifique), temos que $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ é uma base de V , porém não é ortogonal.

Denominando $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$, vamos determinar a base ortonormal $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, a partir da base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de V .

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1$$

$$\left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) = \frac{(0, 1, 2) \cdot (1, 0, 1)}{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, 2) - 1(1, 0, 1) = (-1, 1, 1)$$

Assim, $B' = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$

Sendo

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} = \sqrt{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1)} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2} = \sqrt{(-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)} = \sqrt{3}$$

a base ortonormal B'' correspondente a B' de V será

$$B'' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

5. Considerando o subespaço $V = \{(1, 0, -1, 1), (1, -1, 0, 3)\}$, do $\mathbb{R}^4$ pede-se:

a. determine $V^\perp$;

b. determine uma base ortonormal de $V^\perp$.

Solução

a. Sendo $\{(1, 0, -1, 1), (1, -1, 0, 3)\}$ LI (verifique), é uma base de V , e, como vimos na teoria, um vetor $\mathbf{u} = (x, y, z, t) \in V^\perp$ se $\mathbf{u} \perp (1, 0, -1, 1)$ e $\mathbf{u} \perp (1, -1, 0, 3)$, ou seja:

$$(x, y, z, t) \cdot (1, 0, -1, 1) = 0$$

e

$$(x, y, z, t) \cdot (1, -1, 0, 3) = 0$$

que origina o sistema linear

$$\begin{cases} x - z + t = 0 \\ x - y + 3t = 0 \end{cases}$$

Escrevendo y e z em função de x e t temos:

$$y = x + 3t \quad \text{e} \quad z = x + t.$$

Então: $V^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x + 3t \text{ e } z = x + t\}$, ou $V^\perp = \{(x, x + 3t, x + t, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x, t \in \mathbb{R}\}$

b. Uma base de $V^\perp$ (não-ortonormal) é:

$$B = \{(1, 1, 1, 0), (0, 3, 1, 1)\}. \text{ (Verifique, conforme o Exemplo 4.)}$$

Novamente, escrevemos $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 1, 1)$ e determinemos a base ortogonal $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a partir da base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1$$

$$\left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) = \frac{(0, 3, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 0)}{(1, 1, 1, 0) \cdot (1, 1, 1, 0)} = \frac{4}{3}$$

$$u_2 = (0, 3, 1, 1) - \left(\frac{4}{3} \right) (1, 1, 1, 0), \text{ daí } u_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)$$

Assim, temos:

$$B' = \left\{ (1, 1, 1, 0), \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right) \right\}$$

Calculando a norma de u_1 e u_2 , temos:

$$\|u_1\| = \sqrt{3} \text{ e } \|u_2\| = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

e daí obtemos a base ortonormal B'' correspondente à base ortogonal B' de V^4 :

$$B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(-\frac{4}{\sqrt{51}}, \frac{5}{\sqrt{51}}, -\frac{1}{\sqrt{51}}, \frac{3}{\sqrt{51}} \right) \right\}$$

6. Sendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ subespaço do $\mathbb{R}^3$, determine $V^\perp$ e uma base ortonormal de $V^\perp$.

Solução

Reescrevemos V e temos $V = \{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3\}$. Sendo (a, b, c) um vetor qualquer de $V^\perp$, temos:

$$(a, b, c) \perp (x, 2x, 3x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ ou } (a, b, c) \cdot (x, 2x, 3x) = 0$$

logo, $ax + 2bx + 3cx = 0$, isto é, $(a + 2b + 3c)x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos então $a + 2b + 3c = 0$. Assim,

$$V^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b + 3c = 0\}.$$

Para obter uma base B de $V^\perp$, escrevemos, por exemplo,

$$a = -2b - 3c \text{ e daí } V^\perp = \{(-2b - 3c, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Uma base B de $V^\perp$ (não-ortogonal) é:

$$B = \{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}.$$

Denominando $v_1 = (-2, 1, 0)$, $v_2 = (-3, 0, 1)$, vamos obter, a partir da base $B = \{v_1, v_2\}$, a base ortogonal $B' = \{u_1, u_2\}$ de $V^\perp$

$$u_1 = v_1 = (-2, 1, 0)$$

$$u_2 = v_2 - \left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) \cdot u_1$$

$$\left(\frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) = \frac{(-3, 0, 1) \cdot (-2, 1, 0)}{(-2, 1, 0) \cdot (-2, 1, 0)} = \frac{6}{5}$$

$$u_2 = (-3, 0, 1) - \left(\frac{6}{5} \right) (-2, 1, 0), \text{ daí } u_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1 \right)$$

Assim temos:

$$B' = \left\{ (-2, 1, 0), \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1 \right) \right\}$$

$$\text{Sendo } \|u_1\| = \sqrt{5}, \|u_2\| = \sqrt{\frac{14}{5}}$$

a base ortonormal de V^1 correspondente à base B' será:

$$B'' = \left\{ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{14}}, -\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \right) \right\}$$

Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Neste capítulo vamos abordar um assunto concernente ao cálculo diferencial e integral: as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, que têm ampla aplicação notadamente na física, vibrações mecânicas, circuitos elétricos e em outras ciências, do ponto de vista da álgebra linear.

9.1 Operadores lineares diferenciais com coeficientes constantes

Denotaremos por $C^\infty(\mathbb{R})$ o conjunto das funções definidas em $\mathbb{R}$ (ou com domínio $\mathbb{R}$) a valores reais, deriváveis infinitamente (possuem derivadas de todas as ordens).

Se portanto escrevemos $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, isso significa que $y = f(x)$ é uma função que satisfaz as condições anteriores.

Se definimos agora duas operações, a saber:

9.1.1 Adição (soma) de funções

$\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos $(f + g) \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

9.1.2 Multiplicação de um número real por uma função

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos $\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Podemos verificar facilmente que $C^\infty(\mathbb{R})$, munido dessas operações, é um *espaço vetorial*. (Nesse caso os *vetores* são *funções*.)

Definindo agora uma função (que denotamos por D)

$$D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

temos que $D(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$, pois: $D(f)(x) = f'(x)$.

Observamos que

a. $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$D(f + g)(x) = (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = D(f)(x) + D(g)(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } D(f + g) = D(f) + D(g)$$

b. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$D(\alpha f)(x) = (\alpha f)'(x) = \alpha f'(x) = \alpha D(f)(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } D(\alpha f) = \alpha D(f).$$

Segue que D é um **operador linear** em $C^\infty(\mathbb{R})$ (operador de derivação).

Se definimos o **operador identidade** I (ele faz o papel do número 1 em relação ao produto numérico usual) por:

$$I(f)(x) = f(x), \text{ ou } I(f) = f,$$

e os operadores $D^2, D^3, \dots, D^n, \dots$ por:

$$D^2(f)(x) = f''(x),$$

$$D^3(f)(x) = f'''(x),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$D^n(f)(x) = f^{(n)}(x),$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

podemos construir o operador L dado por $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$; ($a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes reais, com $a_n \neq 0$).

Escrevemos então:

$$L(f(x)) = a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x), \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

L é denominado **operador diferencial de grau n** com coeficientes constantes. (O grau é dado pela derivada de maior ordem.)

Observação: Como só trabalharemos com tais operadores, designaremos L simplesmente como *operador diferencial* (ficando sempre subentendido “com coeficientes constantes”)

EXEMPLOS

Determine $L(f(x))$ em cada caso:

1. $L = 2D + I, f(x) = 2x^3$

Solução

$$f'(x) = 6x^2$$

$$\begin{aligned} L(f(x)) &= (2D + I)(f(x)) = 2D(f(x)) + I(f(x)) = 2f'(x) + f(x) = \\ &= 2 \cdot 6x^2 + 2x^3 = 12x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

$$\therefore L(f(x)) = 12x^2 + 2x^3$$

2. $L = D^2 - 3D + I, f(x) = x^3 + e^{2x}$

Solução

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^{2x} \text{ e } f''(x) = 6x + 4e^{2x}$$

$$\begin{aligned} L(f(x)) &= (D^2 - 3D + I)(f(x)) = D^2(f(x)) - 3D(f(x)) + I(f(x)) = \\ &= f''(x) - 3f'(x) + f(x) = (6x + 4e^{2x}) - 3(3x^2 + 2e^{2x}) + (x^3 + e^{2x}) = \\ &= 6x + 4e^{2x} - 9x^2 - 6e^{2x} + x^3 + e^{2x} = 6x - 9x^2 + x^3 - e^{2x} \end{aligned}$$

$$\therefore L(f(x)) = 6x - 9x^2 + x^3 - e^{2x}$$

$$3. L = 3D^2 + D + 2I, f(x) = 3 \sin(2x)$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cos(2x) \text{ e } f''(x) = -12 \sin(2x) \\ L(f(x)) &= (3D^2 + D + 2I)(f(x)) = 3D^2(f(x)) + D(f(x)) + 2I(f(x)) = \\ &= 3f''(x) + f'(x) + 2f(x) = 3(-12 \sin(2x)) + 6 \cos(2x) + 6 \sin(2x) = \\ &= 6 \cos(2x) - 30 \sin(2x) \\ \therefore L(f(x)) &= 6 \cos(2x) - 30 \sin(2x) \end{aligned}$$

$$4. L = D^3 + 2D^2 + D, f(x) = e^{4x} + \cos(3x)$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4e^{4x} - 3 \sin(3x); f''(x) = 16e^{4x} - 9 \cos(3x) \text{ e } f'''(x) = 64e^{4x} + 27 \sin(3x) \\ L(f(x)) &= (D^3 + 2D^2 + D)(f(x)) = D^3(f(x)) + 2D^2(f(x)) + D(f(x)) = \\ &= f'''(x) + 2f''(x) + f'(x) = 64e^{4x} + 27 \sin(3x) + 2(16e^{4x} - 9 \cos(3x)) + 4e^{4x} - 3 \sin(3x) = \\ &= 100e^{4x} + 24 \sin(3x) - 18 \cos(3x) \\ \therefore L(f(x)) &= 100e^{4x} + 24 \sin(3x) - 18 \cos(3x) \end{aligned}$$

$$5. L = 2D^4 - D^3 + 3I, f(x) = \sin x$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x; f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x \text{ e } f^{(4)}(x) = \sin x \\ L(f(x)) &= (2D^4 - D^3 + 3I)(f(x)) = 2D^4(f(x)) - D^3(f(x)) + I(f(x)) = \\ &= 2f^{(4)}(x) - f'''(x) + 3f(x) = 2 \sin x - (-\cos x) + 3 \sin x = \\ &= 5 \sin x + \cos x \\ \therefore L(f(x)) &= 5 \sin x + \cos x \end{aligned}$$

9.2 Álgebra dos operadores lineares

Nesta seção vamos apenas reformular as operações já estudadas (Capítulo 5), o que é necessário em vista da peculiaridade do nosso atual espaço vetorial ($C^\infty(\mathbb{R})$).

9.2.1 Adição (soma)

Sejam L_1 e L_2 operadores lineares. De modo natural, definimos o operador linear soma de L_1 e L_2 , denotado por $L_1 + L_2$, como:

$$(L_1 + L_2)(f) = L_1(f) + L_2(f), \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

significando isto:

$$(L_1 + L_2)(f(x)) = L_1(f(x)) + L_2(f(x)), \forall f \in \mathbb{R}.$$

9.2.2 Multiplicação de um operador linear por um número real

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e L é um operador linear, então também naturalmente definimos o operador linear αL como:

$$(\alpha L)(f) = \alpha L(f), \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

significando isto:

$$(\alpha L)(f(x)) = \alpha L(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em virtude das definições, podemos trabalhar com operadores lineares de modo análogo ao que fazemos com polinômios, como veremos a seguir.

EXEMPLOS

Em cada caso, realize as operações indicadas para os operadores lineares dados:

1. $L_1 = 2D + I, L_2 = D^2 - D$

a. $L_1 + L_2$ b. $3L_2$ c. $2L_1 + 4L_2$

Solução $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \text{a. } (L_1 + L_2)(f) &= L_1(f) + L_2(f) = (2D + I)(f) + (D^2 - D)(f) = \\ &= 2D(f) + I(f) + D^2(f) - D(f) = D^2(f) + D(f) + I(f) = \\ &= (D^2 + D + I)(f) \\ \therefore L_1 + L_2 &= D^2 + D + I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (3L_2)(f) &= 3L_2(f) = 3(D^2 - D)(f) = 3(D^2(f) - D(f)) = \\ &= 3D^2(f) - 3D(f) = (3D^2 - 3D)(f) \\ \therefore 3L_2 &= 3D^2 - 3D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (2L_1 + 4L_2)(f) &= (2L_1)(f) + (4L_2)(f) = 2L_1(f) + 4L_2(f) = \\ &= 2(2D + I)(f) + 4(D^2 - D)(f) = 4D^2(f) + 2I(f) = (4D^2 + 2I)(f) \\ \therefore 2L_1 + 4L_2 &= 4D^2 + 2I \end{aligned}$$

Observe que os resultados podem ser obtidos operando diretamente com L_1 e L_2 como se fossem polinômios. No próximo exemplo faremos isso.

2. $L_1 = 2D^3 - 5D^2 + D + I, L_2 = D^2 - 3D + 2I$

a. $L_1 + L_2$ b. $3L_1 - 2L_2$

Solução

$$\begin{aligned} \text{a. } L_1 + L_2 &= 2D^3 - 5D^2 + D + I + D^2 - 3D + 2I = \\ &= 2D^3 - 4D^2 - 2D + 3I \\ \therefore L_1 + L_2 &= 2D^3 - 4D^2 - 2D + 3I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } 3L_1 - 2L_2 &= 3(2D^3 - 5D^2 + D + I) - 2(D^2 - 3D + 2I) = \\ &= 6D^3 - 17D^2 + 9D - I \\ \therefore 3L_1 - 2L_2 &= 6D^3 - 17D^2 + 9D - I \end{aligned}$$

3. $L_1 = D^2 + 7D, L_2 = 3D^2 - D + I$

a. $L_1 - L_2$ b. $L_1 + 2L_2$

Solução

$$\begin{aligned} \text{a. } L_1 - L_2 &= D^2 + 7D - (3D^2 - D + I) = D^2 + 7D - 3D^2 + D - I = -2D^2 + 8D - I \\ \therefore L_1 - L_2 &= -2D^2 + 8D - I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } L_1 + 2L_2 &= D^2 + 7D + 2(3D^2 - D + I) = D^2 + 7D + 6D^2 - 2D + 2I \\ \therefore L_1 + 2L_2 &= 7D^2 + 5D + 2I \end{aligned}$$

9.2.3 Composição de operadores lineares

Se L_1 e L_2 são operadores lineares, definimos a composição (ou produto) de L_1 e L_2 denotado por $L_1 L_2$ como o operador linear

$$(L_1 L_2)(f(x)) = L_1(L_2(f(x))), \forall x \in \mathbb{R}, \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

A mesma definição vale para três ou mais operadores lineares.

EXEMPLOS

Realize as operações indicadas para os operadores dados:

1. $L_1 = 2D + I, L_2 = D - 3I$

a. $L_1 L_2$ b. L_1^2 c. L_2^3

Solução

a. $L_1 L_2 = (2D + I)(D - 3I) = 2D^2 - 6DI + ID - 3II = 2D^2 - 5D - 3I$

$\therefore L_1 L_2 = 2D^2 - 5D - 3I$

b. $L_1^2 = (2D + I)^2 = (2D + I)(2D + I) = 2D \cdot 2D + 2DI + I2D + II = 4D^2 + 4D + I$

$\therefore L_1^2 = 4D^2 + 4D + I$

c. $L_2^3 = (D - 3I)^3 = (D - 3I)(D - 3I)^2 = (D - 3I)(D^2 - 6D + 9I) = D^3 - 9D^2 + 27D - 27I$

$\therefore L_2^3 = D^3 - 9D^2 + 27D - 27I$

2. $L_1 = 5D^2 - 2I, L_2 = 2D + 3I$

a. $(L_1 + L_2)L_1$ b. $(3L_1 - 2L_2)(5L_2)$

Solução

a. $(L_1 + L_2)L_1 = (5D^2 - 2I + 2D + 3I)(5D^2 - 2I) =$
 $= (5D^2 + 2D + I)(5D^2 - 2I) = 25D^4 + 10D^3 - 5D^2 - 4D - 2I$

$\therefore (L_1 + L_2)L_1 = 25D^4 + 10D^3 - 5D^2 - 4D - 2I$

b. $(3L_1 - 2L_2)(5L_2) = (3(5D^2 - 2I) - 2(2D + 3I))(5(2D + 3I)) =$
 $= (15D^2 - 4D - 12I)(10D + 15I) = 150D^3 + 185D^2 - 180D - 180I$

$\therefore (3L_1 - 2L_2)(5L_2) = 150D^3 + 185D^2 - 180D - 180I$

Quanto às suas propriedades, o produto $L_1 L_2$ é análogo (semelhante) ao produto de polinômios.

Verifiquemos isso por meio de um exemplo, considerando o operador linear $L = D^2 - 5D + 6I$.

Formando o polinômio de variável real x , $p(x) = x^2 - 5x + 6$, que tem raízes reais $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, sabemos, da álgebra dos polinômios, que podemos decompor $p(x)$ no produto de $(x - 2)$ e $(x - 3)$, isto é:

$$p(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3).$$

Observemos agora o operador linear $(D - 2I)(D - 3I)$.

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, vem:

$$\begin{aligned} (D - 2I)(D - 3I)(f(t)) &= (D - 2I)(D(f(t)) - 3I(f(t))) = (D - 2I)(f'(t) - 3f(t)) = \\ &= (D(f'(t) - 3f(t)) - 2I(f'(t) - 3f(t))) = f''(t) - 3f'(t) - 2f'(t) + 6f(t) = \\ &= f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) \end{aligned}$$

Se trocamos a ordem dos fatores:

$$(D - 3I)(D - 2I)(f(t)) = (D - 3I)(Df(t) - 2If(t)) = (D - 3I)(f'(t) - 2f(t)) = \dots = f'''(t) - 5f'(t) + 6f(t)$$

$$\text{ou seja, } (D - 2I)(D - 3I) = (D - 3I)(D - 2I)$$

(comutativo)

Agora: $L(f(t)) = D^2 - 5D + 6I = (D - 2I)(D - 3I)$, e verificamos a analogia com o produto de polinômios.

Notação: Sendo o produto comutativo, então, se L é um operador linear, escrevemos $LL = L^2$, $L^3 = LLL$ e assim por diante.

EXEMPLOS

Decomponha cada operador linear dado no produto de operadores lineares “mais simples” (com grau menor)

1. $L = D^2 + 3D + 2I$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^2 + 3x + 2$, cujas raízes são -1 e -2 .

Então: $L = D^2 + 3D + 2I = (D + I)(D + 2I)$

2. $L = D^2 - 6D + 9I$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^2 - 6x + 9$, com raiz dupla 3 .

Então: $L = D^2 - 6D + 9I = (D - 3I)(D - 3I) = (D - 3I)^2$

3. $L = D^2 + 5D$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^2 + 5x$, cujas raízes são 0 e -5 .

Então: $L = D^2 + 5D = D(D + 5I)$

4. $L = D^2 - 4D + 13I$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^2 - 4x + 13$, cujas raízes complexas são $2 + 3i$ e $2 - 3i$.

Então $L = D^2 - 4D + 13I = (D - (2 + 3i)I)(D - (2 - 3i)I)$

5. $L = D^3 - D^2 - 12D$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^3 - x^2 - 12x$,

$$p(x) = x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \text{ cujas raízes são } 0, -3, 4.$$

Então: $L = D^3 - D^2 - 12D = D(D + 3I)(D - 4I)$

6. $L = D^3 - 2D^2 - D + 2I$

Polinômio correspondente: $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$,

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \text{ cujas raízes são } 2, -1, 1.$$

Então $L = D^3 - 2D^2 - D + 2I = (D - 2I)(D - I)(D + I)$ ■

9.3 Equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes

Consideremos o operador diferencial definido anteriormente:

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \text{ constantes reais (coeficientes) com } a_n \neq 0.$$

Definição 1 A equação $L(y) = 0$ é denominada equação diferencial linear homogênea de grau n com coeficientes constantes na função incógnita y .

Explicitamente: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$

O termo “homogênea” se refere ao fato de que o lado direito da equação é zero.

Definição 2 Uma solução da equação é uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $L(f(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, isto é, $a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Da definição de núcleo de um operador linear ($N(L)$), segue que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é solução de $L(y) = 0 \Leftrightarrow f \in N(L)$.

Observação (1): Sendo $N(L)$ um subespaço de $C^\infty(\mathbb{R})$, notamos que

1. se $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ são soluções de $L(y) = 0$, então $f + g \in C^\infty(\mathbb{R})$ também é solução de $L(y) = 0$;
2. se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é solução de $L(y) = 0$, então $\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ constante) também é solução de $L(y) = 0$.

O seguinte teorema nos auxiliará na resolução das equações homogêneas.

Teorema Se $L = L_1 L_2$ (operadores lineares), então $N(L_1) \subset N(L)$ e $N(L_2) \subset N(L)$.

Demonstração: Se $f \in N(L_1)$, então $L_1(f) = 0$, daí $L(f) = L_1 L_2(f) = L_2 L_1(f) = L_2(0) = 0$, donde $f \in N(L)$ e $N(L_1) \subset N(L)$. Do mesmo modo prova-se que $N(L_2) \subset N(L)$.

Observação (2): O Teorema evidentemente vale para $L = L_1 L_2 \dots L_n$ ($n \geq 3$), mas só necessitaremos dele para $n = 2$.

Concluimos do Teorema e da Observação (1) que se decomposmos um operador L como $L = L_1 L_2$, então, para achar as soluções de $L(y) = 0$ (que pertencem a $N(L)$), basta somar as soluções de $L_1(y) = 0$ (que pertencem a $N(L_1)$) com as soluções de $L_2(y) = 0$ (que pertencem a $N(L_2)$).

9.3.1 Soluções da equação de 1ª ordem $L(y) = 0$ onde $L = D - aI, a \in \mathbb{R}$

Escrevendo a equação na forma $y' - ay = 0$ (equação separável) vem:

$$y' = ay \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ay \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a dx \Rightarrow \ln |y| = ax + k \Rightarrow |y| = e^{ax+k} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |y| = e^k e^{ax} \Rightarrow y = \pm e^k a^{ax},$$

fazendo $c = \pm e^k$ (constante) vem que $y = ce^{ax}$ é a solução geral de $(D - aI)(y) = 0$.

Observação (1): Do cálculo elementar
 a constante,

$$a > 0, a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

(x é o logaritmo de y na base a).

Se $a = e \cong 2,718$ (um número irracional transcendente denominado e em homenagem a Euler (lê-se: “Oiler”), importante matemático alemão, então

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \log_e y$$

é indicado $x = \ln y$ (logaritmo neperiano, em homenagem a John Napier, matemático que inventou os logaritmos).

9.3.2 Soluções da equação de 2ª ordem $L(y) = 0$ em que $L = D^2 + bD + cI$, $b, c \in \mathbb{R}$ (constantes)

Nesse caso as soluções são as raízes da equação $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, chamada equação característica associada a $L(y) = 0$. Olhando o discriminante da equação característica

$$(\Delta = b^2 - 4ac),$$

temos três casos a considerar:

1º Caso:

$$\Delta > 0$$

A equação tem duas raízes reais e distintas λ_1 e λ_2 . Nesse caso, como já vimos, $L = D^2 + bD + cI = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I)$, e a equação diferencial fica $L(y) = (D^2 + bD + cI)(y) = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I)(y) = 0$.

As soluções de $(D - \lambda_1 I)(y) = 0$ e $(D - \lambda_2 I)(y) = 0$ são respectivamente:

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x} \text{ e } y_2 = c_2 e^{\lambda_2 x} \text{ (} c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes).}$$

Do Teorema e da Observação (1), segue que a solução da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2º Caso:

$$\Delta = 0$$

A equação característica tem duas raízes reais e iguais (raiz dupla) $\lambda_1 = \lambda_2$. Nesse caso, a equação diferencial fica:

$$L(y) = (D^2 + bD + cI)(y) = (D - \lambda_1 I)^2(y) = (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_1 I)(y) = 0.$$

Pelo Teorema,

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x}$$

(c_1 constante) é solução de $L(y) = 0$ (pois é solução de $(D - \lambda_1 I)(y) = 0$).

Afirmamos que

$$y_2 = c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

(c_2 constante) também é solução de $L(y) = 0$.

De fato:

$$\begin{aligned} L(y_2) &= (D - \lambda_1 I)(D - \lambda_1 I)(c_2 x e^{\lambda_1 x}) = \\ &= (D - \lambda_1 I)(D(c_2 x e^{\lambda_1 x}) - \lambda_1 I(c_2 x e^{\lambda_1 x})) = \\ &= (D - \lambda_1 I)(c_2 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 c_2 x e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 c_2 x e^{\lambda_1 x}) = \\ &= (D - \lambda_1 I)(c_2 e^{\lambda_1 x}) = 0 \\ &\text{(pois } c_2 e^{\lambda_1 x} \text{ é solução de } (D - \lambda_1 I)(y) = 0). \end{aligned}$$

Então, a solução geral da equação diferencial é:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3º Caso: $\Delta < 0$

A equação característica tem duas raízes complexas conjugadas, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\beta > 0$ e

$$i = \sqrt{-1}$$

é denominada unidade imaginária. (Disso segue que $i^2 = -1$.)

Afirmamos que

$$y_1 = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x \text{ e } y_2 = c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

(c_1, c_2 constantes) são soluções da equação $L(y) = 0$. Vamos provar isso para y_1 (a demonstração para y_2 é análoga, e deixamos a cargo do leitor).

Das relações entre coeficientes e raízes da equação característica vem:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= \alpha + \beta i + \alpha - \beta i = 2\alpha = -b \Rightarrow b = -2\alpha \\ \lambda_1 \lambda_2 &= (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 - \alpha \beta i + \alpha \beta i - \beta^2 i^2 = \alpha^2 - \beta^2(-1) = \alpha^2 - \beta^2 = c\end{aligned}$$

De $y_1 = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x$ vem:

$$\begin{aligned}y_1' &= c_1 \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + c_1 \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_1'' &= c_1 \alpha^2 e^{\alpha x} \sin \beta x + 2c_1 \alpha \beta e^{\alpha x} \cos \beta x - c_1 \beta^2 e^{\alpha x} \sin \beta x\end{aligned}$$

substituindo y_1, y_1', y_1'', b e c obtidos anteriormente no lado esquerdo da equação, vem:

$$\begin{aligned}y'' + by' + cy &= y_1'' - 2\alpha y_1' + (\alpha^2 + \beta^2)y_1 = \\ &= (c_1 \alpha^2 e^{\alpha x} \sin \beta x + 2c_1 \alpha \beta e^{\alpha x} \cos \beta x - c_1 \beta^2 e^{\alpha x} \sin \beta x) - \\ &\quad - 2\alpha(c_1 \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + c_1 \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) + (\alpha^2 + \beta^2) c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x = 0\end{aligned}$$

portanto $y_1 = c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x$ é solução da equação diferencial.

Então, a solução geral da equação diferencial é

$$\begin{aligned}y &= c_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \text{ ou, ainda,} \\ y &= e^{\alpha x} (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x).\end{aligned}$$

Observação:

O estudo da equação de 2ª ordem completa, $y'' + by' + cy = f(x)$, em que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, pertence à esfera do cálculo diferencial e integral. Essas equações (homogênea e completa) têm ampla aplicação na física (vibrações mecânicas, circuitos elétricos etc.).

Para o nosso estudo, o que apresentamos nos parece suficiente. (Por isso não abordaremos também equações diferenciais de ordem superior à 2ª.)

EXEMPLOS

1. Verifique, em cada caso, se a função dada é solução da equação diferencial:

a. $y'' + 6y' - 16y = 0, f(x) = 3e^{2x}$

Solução

Como $f(x) = 3e^{2x}$, temos $f'(x) = 6e^{2x}$ e $f''(x) = 12e^{2x}$.

Substituindo no lado esquerdo da equação y'', y' e y respectivamente, por $f''(x), f'(x)$ e $f(x)$, vem:

$$f''(x) + 6f'(x) - 16f(x) = 12e^{2x} + 6 \cdot 6e^{2x} - 16 \cdot 3e^{2x} = 48e^{2x} - 48e^{2x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b. $y'' - 5y' = 0, f(x) = 3 + e^{5x}$

Solução

Como $f(x) = 3 + e^{5x}$, temos $f'(x) = 5e^{5x}$ e $f''(x) = 25e^{5x}$, daí

$$y'' - 5y' = f''(x) - 5f'(x) = 25e^{5x} - 5 \cdot 5e^{5x} = 25e^{5x} - 25e^{5x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c. $y'' + 8y' + 16y = 0, f(x) = xe^{-4x}$

Solução

Como $f(x) = xe^{-4x}$, temos:

$$f'(x) = e^{-4x} - 4xe^{-4x}$$

$$f''(x) = -8e^{-4x} + 16xe^{-4x}$$

$$\begin{aligned} y'' + 8y' + 16y &= f''(x) + 8f'(x) + 16f(x) = \\ &= -8e^{-4x} + 16xe^{-4x} + 8(e^{-4x} - 4xe^{-4x}) + 16xe^{-4x} = \\ &= -8e^{-4x} + 8e^{-4x} + 32xe^{-4x} - 32xe^{-4x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d. $y'' + 2y' + 5y = 0, f(x) = 3e^{-x} \sin 2x$

Solução

Como $f(x) = 3e^{-x} \sin 2x$, temos $f'(x) = -3e^{-x} \sin 2x + 6e^{-x} \cos 2x$

$$f''(x) = -9e^{-x} \sin 2x - 12e^{-x} \cos 2x$$

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = \\ &= -9e^{-x} \sin 2x - 12e^{-x} \cos 2x + 2(-3e^{-x} \sin 2x + 6e^{-x} \cos 2x) + 5 \cdot 3e^{-x} \sin 2x = \\ &= -9e^{-x} \sin 2x - 12e^{-x} \cos 2x - 6e^{-x} \sin 2x + 12e^{-x} \cos 2x + 15e^{-x} \sin 2x = \\ &= 15e^{-x} \sin 2x - 15e^{-x} \sin 2x + 12e^{-x} \cos 2x - 12e^{-x} \cos 2x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Determine as equações diferenciais homogêneas originadas pelos operadores lineares dados:

a. $L = D^2 + \sqrt{2}D - 3I$

Solução

$$y'' + \sqrt{2}y' - 3y = 0$$

b. $L = D^2 - D$

Solução

$$y'' + y' = 0$$

c. $L = D^2 - 3I$

Solução

$$y'' - 3y = 0$$

d. $L = D^2 + 6D + 25I$

Solução

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

e. $L = D + 7I$

Solução

$$y' + 7y = 0$$

f. $L = D^2 - 8D + 25I$

Solução

$$y'' - 8y' + 25y = 0$$

3. (i) Determine o operador linear que origina cada equação linear homogênea dada.

(ii) Resolva a equação.

a. $y'' + 2y' - 3y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 + 2D - 3I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, daí

$L = (D - I)(D + 3I)$ e a equação diferencial homogênea é $(D - I)(D + 3I)(y) = 0$.

Disso segue: $(D - I)(y) = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^x$

$(D + 3I)(y) = 0 \Rightarrow y_2 = c_2 e^{-3x}$

A solução geral da equação diferencial é: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$.

b. $y'' + 2y' = 0$

Solução

(i) $L = D^2 + 2D$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, daí

$L = D(D + 2I)$, e a equação diferencial homogênea é $D(D + 2I)(y) = 0$.

Disso segue: $D(y) = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{0x} = c_1 \cdot 1 = c_1$

$(D + 2I)(y) = 0 \Rightarrow y_2 = c_2 e^{-2x}$

A solução geral da equação diferencial é $y = c_1 + c_2 e^{-2x}$.

c. $y'' - 9y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 - 9I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 - 9 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$, daí

$L = (D - 3I)(D + 3I)$, e a equação diferencial homogênea é $(D - 3I)(D + 3I)(y) = 0$.

Disso segue: $(D - 3I)(y) = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{3x}$

$(D + 3I)(y) = 0 \Rightarrow y_2 = c_2 e^{-3x}$

A solução geral da equação diferencial é $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$.

d. $y'' - 10y' + 25y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 - 10D + 25I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ (raiz dupla), daí $L = (D - 5I)^2$, e a equação diferencial homogênea é $(D - 5I)^2(y) = 0$.

Disso segue: $(D - 5I)(y) = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{5x}$.

A outra solução da equação é $y_2 = c_2 x e^{5x}$.

A solução geral da equação diferencial é $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$.

e. $y'' + 8y' + 16y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 + 8D + 16I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$ (raiz dupla), daí $L = (D + 4I)^2$, e a equação diferencial homogênea é $(D + 4I)^2(y) = 0$.

Disso segue: $(D + 4I)(y) = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{-4x}$.

A outra solução da equação é $y_2 = c_2 x e^{-4x}$.

A solução geral da equação diferencial é $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$.

f. $y'' + y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 + I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 1 = 0$, cujas raízes complexas são $\lambda_1 = 0 - i$, $\lambda_2 = 0 + i$, e daí, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

A solução geral da equação diferencial é:

$$y = e^{0x} (c_1 \sin x + c_2 \cos x), \text{ ou } y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

g. $y'' + 49y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 + 49I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 + 49 = 0$, cujas raízes complexas são $\lambda_1 = 0 - 7i$, $\lambda_2 = 0 + 7i$, e daí, $\alpha = 0$ e $\beta = 7$.

A solução geral da equação diferencial é:

$$y = e^{0x} (c_1 \sin 7x + c_2 \cos 7x), \text{ ou } y = c_1 \sin 7x + c_2 \cos 7x$$

h. $y'' - 8y' + 25y = 0$

Solução

(i) $L = D^2 - 8D + 25I$

(ii) Equação característica associada: $\lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 4 - 3i$, $\lambda_2 = 4 + 3i$ e daí, $\alpha = 4$ e $\beta = 3$.

A solução geral da equação diferencial é:

$$y = e^{4x} (c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x).$$

Exercícios propostos

Capítulo 1 Matrizes

1. Nos exercícios a seguir, determine, se possível, as matrizes:

$$2A + B; A + C; B + C; A \cdot B; B \cdot A; B + 3(A + C); B \cdot C; C \cdot B; A \cdot C; C \cdot A$$

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Respostas:

$$\text{a. } 2A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 19 \\ 10 & 9 & -5 \end{pmatrix} \quad A + C = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B + 3(A + C) = \begin{pmatrix} -15 & 24 & 10 \\ 10 & -7 & 25 \\ 14 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 13 & 15 \\ 22 & -1 & -51 \\ -8 & 24 & 28 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & -12 & 17 \\ 36 & -8 & 23 \\ -4 & -20 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -22 & 17 & 42 \\ -18 & 21 & 6 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 16 & -28 & 27 \\ 4 & -1 & 6 \\ 28 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 22 & 9 & 36 \\ -6 & 7 & -12 \end{pmatrix} \quad C \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 20 \\ -2 & 11 & 9 \\ 8 & 28 & -4 \end{pmatrix}$$

b. $2A + B$; $B + C$; $B + 3(A + C)$; $B \cdot A$; $C \cdot B$; $A \cdot C$ e $C \cdot A$ e $A + B$ não são possíveis;

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c. \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad A + C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B + C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B + 3(A + C) = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Dadas as matrizes, determine suas inversas:

$$a. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Respostas:

$$a. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b. \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Considere a equação dada por:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Determine o valor da expressão $b + a = c$

Resposta: 23

4. Uma pequena montadora de automóveis, em São Paulo, produz três tipos diferentes de carros, cada um deles passa por três setores diferentes de montagem: setor de motores, lataria e acabamento. O tempo necessário para esses processos é dado em horas pela matriz

motor	lataria	acabamento	
3	2	3	carro tipo A
2	2	3	carro tipo B
4	3	5	carro tipo C

O dono da montadora em São Paulo resolveu ampliar o seu negócio e abriu outra pequena montadora em Santos. Os custos por hora para cada um dos processos são dados em reais pela matriz

São Paulo	Santos	
90	100	motor
100	90	lataria
70	80	acabamento

Qual o significado dos elementos do produto das duas matrizes?

5. Uma família está planejando o custo com educação de seus filhos, Guilherme, Marcelo e Henrique. Os pais têm vontade de colocá-los também em um curso de inglês. O custo total mensal para cada filho é a soma das mensalidades escolares (colégio + inglês) com o custo de transporte. Os custos, em reais, estão descritos pelas seguintes matrizes:

Mensalidade custo mensal

do colégio transporte

$$\begin{bmatrix} 950,00 & 50 \\ 900,00 & 50 \\ 850,00 & 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Guilherme} \\ \text{Marcelo} \\ \text{Henrique} \end{matrix}$$

Mensalidade custo mensal

curso de inglês transporte

$$\begin{bmatrix} 400,00 & 50 \\ 350,00 & 50 \\ 300,00 & 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Guilherme} \\ \text{Marcelo} \\ \text{Henrique} \end{matrix}$$

A soma das matrizes fornece os custos totais de escolas e transporte para cada filho. Qual é o custo total mensal de escolas e de transporte para o Marcelo?

6. Calcule os determinantes:

$$\begin{matrix} \text{a.} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{b.} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & \text{c.} & \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} & \text{d.} & \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Respostas:

$$\text{a. } 1 \quad \text{b. } 0 \quad \text{c. } -5 \quad \text{d. } 26$$

7. Determine a inversa da matriz B a seguir, se existir.

Utilize determinantes.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Capítulo 2 Sistemas lineares

1. Resolva (por escalonamento) e classifique os sistemas:

$$\text{a.} \begin{cases} x + y - 2z + w = 4 \\ 2x - 4y + 2z + 4w = 8 \\ 2x + 3y - 4z - w = 1 \\ 3x - y + 2z + 3w = 12 \end{cases} \quad \text{b.} \begin{cases} 3x - 6y + 3z - 3t = 30 \\ 2x - y + 3z - 2t = 7 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ -3y + z = -2 \\ 2x - 4y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases} \quad \text{f. } \begin{cases} 2x + y + 5z = 8 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\text{g. } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -4x + y + z = 0 \end{cases}$$

Respostas:

a. SPD; solução $\{(1, 2, 1, 3)\}$

b. SPI; solução

$$\left\{ \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{3}z + t, \frac{-13}{3} - \frac{1}{3}z, z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

c. SPD; solução $\{(0, 0, 0)\}$

d. SPD; solução $\{(5, 2, 4)\}$

e. SI

f. SPI; solução

$$\{(5 - 3z, -2 + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

g. SPI; solução

$$\left\{ \left(x, \frac{3}{2}x, \frac{5}{2}x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Uma pequena montadora de automóveis produz três tipos diferentes de carros; cada um deles passa por três setores diferentes de montagem: setor de motores, lataria e acabamento. O setor de motores trabalha 80 horas por semana; o de latarias trabalha 60 horas por semana, e o de acabamento trabalha 95 horas por semana.

Sabendo que:

o carro tipo A precisa de:

- 3 horas no setor de motores
- 2 horas no setor de lataria
- 3 horas no setor de acabamento

o carro tipo B precisa de:

- 2 horas no setor de motores
- 2 horas no setor de lataria
- 3 horas no setor de acabamento

e o carro tipo C precisa de:

- 4 horas no setor de motores
- 3 horas no setor de lataria
- 5 horas no setor de acabamento

Quantos carros de cada tipo a montadora é capaz de produzir semanalmente?

Resposta:

10 carros tipo A

5 carros tipo B

10 carros tipo C

Capítulo 3 Espaços vetoriais

1. Verifique se os subconjuntos são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:

- a. $W = \{(x, y, z) \mid y = 0\}$
- b. $U = \{(x, y, z) \mid x = 2y\}$
- c. $V = \{(x, y, z) \mid z = 2\}$
- d. $S = \{(x, y, z) \mid z = 2y + 1\}$
- e. $S = \{(x, y, z) \mid x \neq y^2\}$

Respostas:

- a. sim b. sim c. não d. não e. não

2. Dados os subespaços, determine $S + T$:

- a. $S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- b. $S = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ e $T = \{(0, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$
- c. $S = \{(x, 2x, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- d. $S = \{(y, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Respostas:

- a. $S + T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- b. $S + T = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$
- c. $S + T = \{(x, 2x + y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- d. $S + T = \{(y, y + a, z + a) \in \mathbb{R}^3\}$

3. Dados os subespaços, determine $S \cap T$:

- a. $S = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- b. $S = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$ e $T = \{(0, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$
- c. $S = \{(x, 2x, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- d. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e $T = \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Respostas:

- a. $S \cap T = \{(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$
- b. $S \cap T = \{(0, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$
- c. $S \cap T = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- d. $S \cap T = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3\}$

4. Determine $U + V$; $U \cap V$; $U + W$; $U \cap W$; $V + W$; $V \cap W$ e verifique se a soma é soma direta:

- a. $U = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$; $V = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$; $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
- b. $U = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$; $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$; $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

Respostas:

- a. $U + V = \mathbb{R}^3$; $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$
 $U + W = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$; $U \cap W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
 $V + W = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$; $V \cap W = \{(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$

- b. $U + V = \{(2y, y + t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$; $U \cap V = \{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$
 $U + W = \{(x, x + y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$; $U \cap W = \{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$
 $V + W = \{(2y + x, y + x) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$; $V \cap W = \{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $\mathbb{R}^2 = V \oplus W$

5. Dê um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços:

- a. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$
b. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$
c. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$
d. $U \cap V$ (sendo U e V os subespaços dos itens a e b)
e. $V + W$ f. $U + W$

Respostas:

- a. $U = [(2, 1, 0), (0, 0, 1)]$
b. $V = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1)]$
c. $W = [(2, 1, -2)]$
d. $U \cap V = [(2, 1, 0)]$
e. $V + W = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1), (2, 1, -2)]$
f. $U + W = [(2, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 1, -2)]$

6. Determine um sistema de geradores do subespaço de U :

- a. $U = \{(x + y, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
b. $U = \{(x - y + z, y, 2z, t) \in \mathbb{R}^4\}$
c. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a + c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$
d. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a + c & b \\ c & b + a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

Respostas:

- a. $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$
b. $U = [(1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 1)]$
c. $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$
d. $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

7. Determine um sistema de geradores dos subespaços:

- a. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$
b. $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$
c. $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ e } z = 3w\}$
d. $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$
e. $U + V$ sendo $U = \{(2y, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ e

$$V = \left\{ \left(x, \frac{z}{2}, z \right) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

f. $U \cap V$, sendo U e V do item e

Respostas:

a. $R = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

b. $S = [(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$

c. $S = [(2, 1, 0, 0), (0, 0, 3, 1)]$

d. $R = [(1, 2, 0), (0, 3, 1)]$

e. $U + V = [(2, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1/2, 1)]$

f. $U \cap V = [(1, 1/2, 1)]$

8. Determine o subespaço gerado por M .

a. $M = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$

b. $M = \{(1, 0), (0, 1)\}$

c. $M = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$

d. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e. $M = \{(1, 2, 3)\}$

Respostas:

a. $[M] = \{(a + c, a + b, a + b) \in \mathbb{R}^3\}$

b. $[M] = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

c. $[M] = \{(a - b, 0, a) \in \mathbb{R}^3\}$

d. $[M] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

e. $[M] = \{(a, 2a, 3a) \in \mathbb{R}^3\}$

Capítulo 4 Base e dimensão

1. Escreva o vetor $\mathbf{u} = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1 = (3, -3, 1, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)$

Resposta:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$$

2. Sendo $\mathbf{u} = (2, -3, 2)$ e $\mathbf{v} = (-1, 2, 4)$, pede-se:

a. escrever $\mathbf{w} = (7, -11, 2)$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

b. para que valores de k , $p = (-8, 14, k)$ é combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?

Resposta:

a. $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$

b. $k = 12$

3. Determine k , $k \in \mathbb{R}$, para que $\mathbf{u} = (1, -2, k)$ seja combinação linear de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} = (3, 0, -2)$ e $\mathbf{w} = (2, -1, -5)$.

Resposta: $k = -8$

4. Escreva $u = 3t^2 + 8t - 5$ como combinação linear dos vetores $v = 2t^2 + 3t - 4$ e $w = t^2 - 2t - 3$.

Resposta: $u = 2v - w$

5. Determine se os vetores são LI ou LD.

- a. $u = (3, 4), v = (1, -3)$
- b. $u = (1, -2, 1), v = (2, 1, -1), w = (7, -4, 1)$
- c. $u = (1, 2, 3), v = (1, 0, -1), w = (3, -1, 0), z = (2, 1, -2)$
- d. $u = (2, -1), v = (3, 5)$
- e. $u = (1, 0), v = (-1, 1), w = (3, 5)$

Respostas:

- a. LI d. LI
- b. LD e. LD
- c. LD

6. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}) \text{ e } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}),$$

pede-se:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

é combinação linear dos vetores de A ? Justifique.

- b. A é uma base de $M_2(\mathbb{R})$? Justifique.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

é combinação linear dos vetores de B ? Justifique.

- d. B é base de $M_2(\mathbb{R})$?

Resposta:

- a. sim b. não
- c. não d. não

7. Verifique se os conjuntos a seguir formam uma base de U :

- a. $U = \mathbb{R}^2, M = \{(1, 2), (-1, 3)\}$
- b. $U = \mathbb{R}^2, M = \{(1, 0), (2, 0)\}$
- c. $U = \mathbb{R}^3, M = \{(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

d. $U = M_2(\mathbb{R}) \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Resposta:

- a. base
- b. não é base
- c. base
- d. base

8. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, t) | x = z \text{ e } t = 0\} \text{ e } V = \{(x, y, z, t) | x + y = 0\}.$$

Pede-se:

- $U + V$
- base e dimensão de $U + V$
- $U \cap V$
- base e dimensão de $U \cap V$

Resposta:

- $U + V = \{(a + x, y - x, a + z, t)\}$
- $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim U + V = 4$
- $U \cap V = \{(x, -x, x, 0)\}$
- $B = \{(1, -1, 1, 0)\}$, $\dim(U \cap V) = 1$

9. Considere os subespaços S , T e U do $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)], T = \{(x, y, z) | 3x - y - z = 0\} \text{ e } U = \{(x, y, z) | x + y = 4x - z = 0\}.$$

Pede-se uma base e a dimensão de:

- S
- T
- U
- $S + T$
- $S \cap T$
- $T + U$
- $T \cap U$

Respostas:

- $\{(1, -1, 2), (0, 3, +3)\}$, $\dim S = 2$
- $\{(0, 1, -1), (1, 3, 0)\}$, $\dim T = 2$
- $\{(1, -1, 4)\}$, $\dim U = 1$
- $\{(1, -1, 2), (0, 3, -3), (0, 0, 6)\}$, $\dim(S + T) = 3$
- $\{(0, 1, -1)\}$, $\dim(S \cap T) = 1$
- $\{(1, 2, 1), (0, 1, -1)\}$, $\dim(T + U) = 2$
- $\{(1, -1, 4)\}$, $\dim(T \cap U) = 1$

10. Determine uma base e a dimensão de W , subespaço do $\mathbb{R}^4$, dado por:

$$W = [(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -1), (3, 8, -3, 1)]$$

Resposta:

$$B = \{(1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 5)\} \text{ é base de } W \text{ e } \dim W = 2$$

11. Determine uma base e a dimensão dos subespaços:

- $R = [(1, -2, 3, -1), (1, 1, -2, 3)]$
- $S = [(-1, 2), (3, -6)]$

Respostas:

- $B = \{(1, -2, 3, -1), (0, -3, 5, -4)\}$ é base de R e $\dim R = 2$
- $B = \{(-1, 2)\}$ é base de S e $\dim S = 1$

12. Dados U e V subespaços do $\mathbb{R}^4$, $U = \{(a, b, c, d) | b + c + d = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) | x + y = 0 \text{ e } z = 2t\}$, determine uma base e a dimensão de:

- U
- V
- $U \cap V$
- $U + V$

Respostas:

- $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ é base de U e $\dim U = 3$
- $B = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ é base de V e $\dim V = 2$

- c. $B = \{(3, -3, 2, 1)\}$ é base de $U \cap V$ e $\dim(U \cap V) = 1$
 d. $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; $\dim(U + V) = 4$
 13. Verifique se são falsas ou verdadeiras as afirmações, justificando sua resposta:

- a. $\{(1, 2), (2, 4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$
 b. $\{(1, 4, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ é base do $\mathbb{R}^4$
 c. $\{(3, 0, 8, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0)\}$ não é um conjunto LI
 d. $\{(2, 0), (-4, 1), (3, 5)\}$ é um conjunto LD
 e. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$

Respostas:

- a. F b. F c. V d. V e. F

Capítulo 5 Transformações lineares

- ✓ 1. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.
 a. $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H(x, y) = (x, x \cdot y)$ é um operador linear
 b. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + 1, y - 1)$ é um operador linear
 c. $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $G(x, y) = (x + y, 3y)$ é um operador linear
 d. $T: U \rightarrow V$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão finita. Se T é sobrejetora então T é bijetora.
 e. $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H(x, y, z) = (y, z)$ é sobrejetora (é fácil verificar). Então podemos afirmar que H é bijetora.

Respostas:

- a. F b. F c. V d. V e. F

- ✓ 2. Sabendo que $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é função linear e que $F(1, -1) = (3, 2, -2)$; $F(-1, 2) = (1, -1, 3)$, onde $A = \{(1, -1), (-1, 2)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, determine $F(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resposta:

$$F(x, y) = (7x + 4y, 3x + y, -x + y)$$

3. Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operador linear do $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $T(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $T(-1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ e $T(1, -1, 0) = (1, 1, 1)$, em que $B = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$, determine $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y + 4z}{3}, \frac{-3y + 3z}{3}, \frac{x - 2y + z}{3} \right)$$

$$F(\alpha u) = \alpha F(u)$$

4. Uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + a, y + b)$ com $a, b \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ é chamada de translação.

- a. Determine a imagem da figura pela translação

$$T(x, y) = (x + 2, y + 2)$$

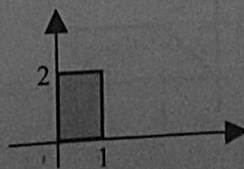


Figura 5.1

b. Essa transformação é linear?

5. Seja $T(x, y) = (3x, 3y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- a. Desenhe no sistema a imagem do retângulo indicado após sofrer a ação da transformação T .
b. Indique se houve uma contração ou uma expansão.



Figura 5.2

6. A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva a figura A na figura B. Pede-se:

- a. a expressão para $T(x, y)$;
b. indicar se houve uma contração ou uma expansão.

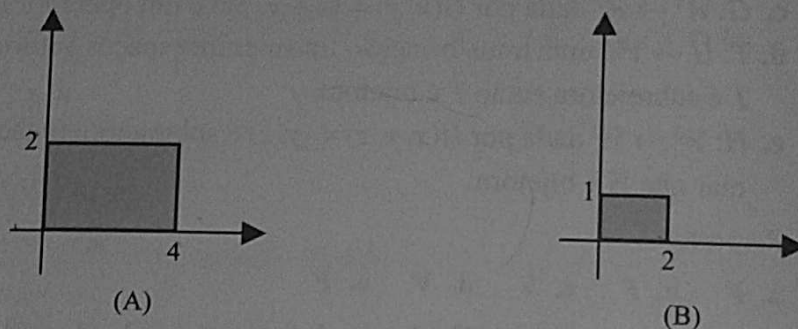


Figura 5.3

7. (Provão – Matemática 1998)

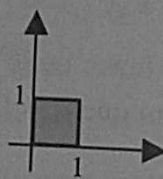


Figura 5.4

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x, y) = (x + 2y, y)$. A imagem, por T , do quadrado representado na Figura 5.4 é:

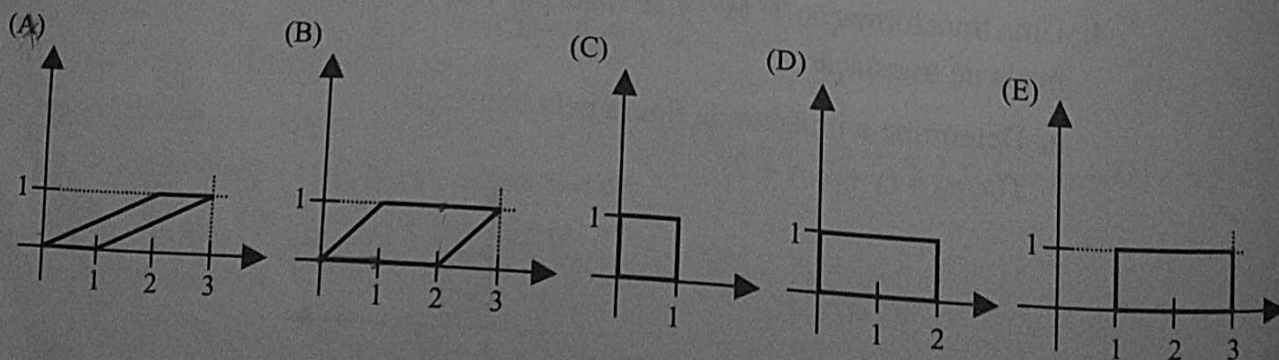


Figura 5.5

8. Toda transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do tipo $T(x, y) = \alpha(x, y)$ é chamada homotetia de razão α . Dada a figura, determine a sua imagem nos seguintes casos:

a. $\alpha = 2$ b. $\alpha = 1$ c. $\alpha = -1$ d. $\alpha = 1/2$ e. $\alpha = -2$

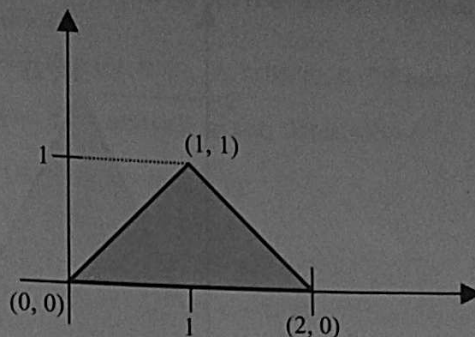


Figura 5.6

9. Dada a Figura 5.7, determine a sua imagem pela transformação (reflexão).

a. $T(x, y) = (x, -y)$
 b. $T(x, y) = (-x, y)$
 c. $T(x, y) = (-x, -y)$
 d. $T(x, y) = (y, x)$

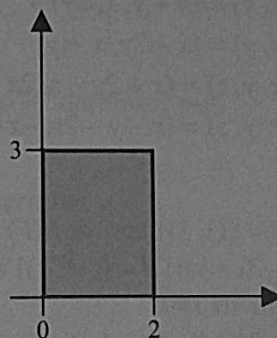


Figura 5.7

10. Determine a imagem da figura pela transformação (cisalhamento).

a. $T(x, y) = (x + 3y, y)$
 b. $T(x, y) = (x, 2x + y)$
 c. $T(x, y) = (x - 2y, y)$

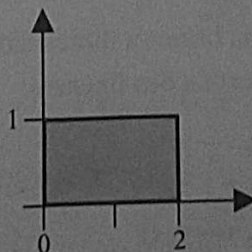


Figura 5.8

11. Determine a imagem da figura pela transformação (rotação de ângulo θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ sendo

- a. $\theta = 30^\circ$ b. $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

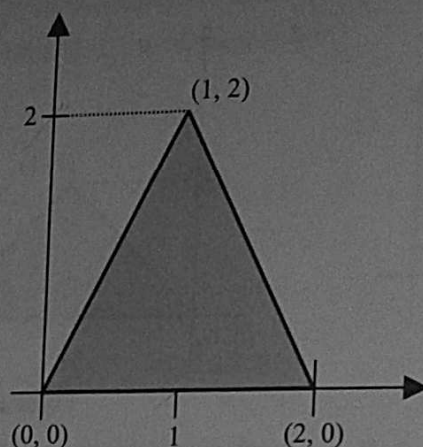


Figura 5.9

- ✓ 12. Determine o núcleo, uma base e a dimensão do núcleo; a imagem, uma base e a dimensão da imagem para cada uma das seguintes funções lineares:

- a. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (3x - y, -3x + y)$
 b. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (x + y, x, 2y)$
 c. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x - 2y, x + y)$
 d. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$
 e. $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$

Respostas:

- a. $N(F) = \{(x, 3x)\} B = \{(1, 3)\}$ base de $N(F)$ e $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(3x - y, -3x + y)\}; B = \{(-1, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 1$
 b. $N(F) = \{(0, 0)\}$ $\dim N(F) = 0$
 $\text{Im}(F) = \{(x + y, x, 2y)\} B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ base de $\text{Im}(F)$ $\dim \text{Im}(F) = 2$
 c. $N(F) = \{(0, 0)\}$ $\dim N(F) = 0$
 $\text{Im}(F) = \{(x - 2y, x + y)\} B = \{(1, 1), (-2, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$ $\dim \text{Im}(F) = 2$
 d. $N(F) = \{(x, -3x, -5x)\} B = \{(1, -3, -5)\}$ $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(x + 2y - z, 2x - y + z)\}; B = \{(1, 2), (0, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 2$
 e. $N(F) = \{(3z, z, z)\} B = \{(3, 1, 1)\}$ $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)\}$
 $B = \{(1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$ $\dim \text{Im}(F) = 2$

- ✓ 13. Determine $N(F)$, uma base e a dimensão de $N(F)$, imagem, uma base e a dimensão da imagem das seguintes transformações lineares:

- a. $F(x, y, z) = (x - y, z - y)$
 b. $F(x, y, z) = (x - z, y + z)$
 c. $F(x, y, z) = (x - y, x - y, z)$
 d. $F(x, y, z) = (x, y + z, 2x + 2z)$

Respostas:

- a. $N(F) = \{(y, y, y) \in \mathbb{R}^3\} B = \{(1, 1, 1)\}$ é base de $N(F)$; $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(x - y, z - y)\}; B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 2$

- b. $N(F) = \{(z, -z, z) \in \mathbb{R}^3\}$; $B = \{(1, -1, 1)\}$ é base de $N(F)$; $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(x - z, y + z)\}$; $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 2$
- c. $N(F) = \{(y, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$; $B = \{(1, 1, 0)\}$ é base de $N(F)$; $\dim N(F) = 1$
 $\text{Im}(F) = \{(x - y, x - y, z)\}$; $B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 2$
- d. $N(F) = \{(0, 0, 0)\}$; $\dim N(F) = 0$
 $\text{Im}(F) = \{(x, y + z, 2x + 2z)\}$; $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ base de $\text{Im}(F)$; $\dim \text{Im}(F) = 3$
14. Verifique se a transformação é inversível; se for, determine F^{-1} .

- a. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x - y, x + y)$
- b. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x, x - y)$
- c. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2y + x, x - y)$
- d. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (2x - z, x + z, y)$

Resposta:

- a. é inversível e $F^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{-a+b}{2}\right)$
- b. é inversível e $F^{-1}(a, b) = (a, a - b)$
- c. é inversível e $F^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+2b}{3}, \frac{a-b}{3}\right)$
- d. é inversível e $F^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{3}, c, \frac{2b-a}{3}\right)$

15. Sendo F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$F(x, y, z) = (x - z, 2y + x, z + 3y) \text{ e}$$

$$G(x, y, z) = (x + y, z - x, 2z - y) \text{ determine:}$$

- a. $F + G$ b. $2F + G$ c. $F \circ G$ d. $G \circ F$

Respostas:

- a. $(F + G)(x, y, z) = (2x + y - z, 2y + z, 2y + 3z)$
- b. $(2F + G)(x, y, z) = (3x + y - 2z, x + 4y + z, 4z + 5y)$
- c. $(F \circ G)(x, y, z) = (x + 2y - 2z, -x + y + 2z, -3x - y + 5z)$
- d. $(G \circ F)(x, y, z) = (2x + 2y - z, -x + 3y + 2z, -x + 4y + 2z)$

16. Para as transformações lineares $F(x, y, z) = (x - y, 2z)$, $G(x, y, z) = (2x, x + y)$ determine $F + G$, $N(F + G)$ uma base e a dimensão de $N(F + G)$.

Respostas:

$$(F + G)(x, y, z) = (3x - y, x + y + 2z)$$

$$N(F + G) = \{(x, 3x, -2x) \in \mathbb{R}^3\}; B = \{(1, 3, -2)\} \text{ é base de } N(F + G); \dim N(F + G) = 1$$

17. Determine $F \circ G$, $N(F \circ G)$, uma base e a dimensão de $N(F \circ G)$ dadas as transformações lineares:

$$F(x, y, z) = (2z, x + y) \text{ e } G(x, y, z) = (3y, z - x, x + y)$$

Respostas:

$$(F \circ G)(x, y, z) = (2x + 2y, 3y + z - x)$$

$$N(F \circ G) = \{(-y, y, -4y) \in \mathbb{R}^3\}; B = \{(-1, 1, -4)\} \text{ é base de } N(F \circ G); \dim N(F \circ G) = 1$$

Capítulo 6 Matriz de uma transformação linear

1. Sendo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear, dada por $T(x, y) = (3x, x - y, 2y)$, determine a matriz $(T)_{A, B}$, sabendo que $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sendo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear, dada por $T(x, y) = (x + y, 2y, x)$, determine a matriz $(T)_{A, B}$, sabendo que $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear definida por $F(x, y, z) = (x, x + y)$. Determine a matriz de F em relação às bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e C base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Resposta:

$$(F)_{B, C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases $A = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ e $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$. Determine $(T)_{A, B}$ e $(T)_{A, C}$, sendo C base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad (T)_{A, C} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. As transformações $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são tais que $S(x, y) = (y, x - y, 2x + 2y)$ e $T(x, y, z) = (x, y)$. Sendo $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determine a matriz $(S \circ T)_B$.

Resposta:

$$(S \circ T)_B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nas bases $A = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 1, -1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

encontre a expressão de $T(x, y)$.

Resposta:

$$T(x, y) = (8x + 18y, 6x + 11y, -2x - 4y)$$

7. Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nas bases $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(3, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 1, -1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ é

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

encontre a expressão de $T(x, y)$.

Resposta:

$$T(x, y) = (14x - 8y, 8x - 7y, -4x + 4y)$$

8. Sendo

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},$$

determine $T(x, y)$, sabendo que T é linear e que $A = \{(1, -1), (0, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$T(x, y) = (2x - y, 0, 3x + y)$$

9. Sendo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear, $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^2$, e sabendo que

$$(T)_{A, B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

determine $T(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Resposta:

$$T(x, y, z) = (-x + 4y - z, -4x - y + 6z)$$

10. (Provão 99 – Matemática) A transformação $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva a figura V na figura W . Pede-se:
- a expressão para $T(x, y)$;
 - (T) , matriz canônica.

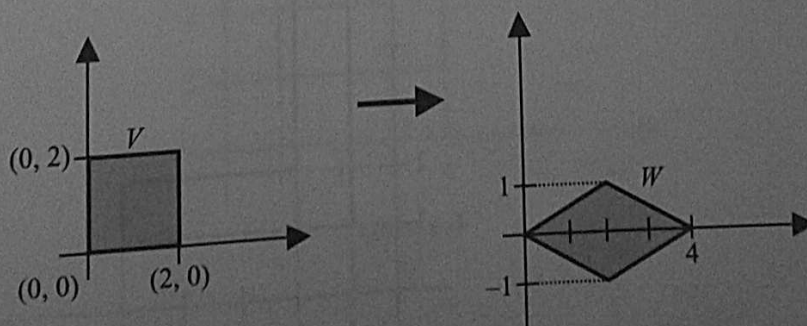


Figura 6.1

Resposta:

$$\text{a. } T(x, y) = \left(x + y, \frac{-x}{2} + \frac{y}{2} \right)$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11. Dados R e S operadores lineares do $\mathbb{R}^3$, definidos por $R(x, y, z) = (x + y, y, z)$ e $S(x, y, z) = (x, x + z, 2z)$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(1, -1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ pede-se:

$$\text{a. } (S)_{B,C}$$

$$\text{b. } (R \circ S)_{C,B}$$

Respostas:

$$\text{a. } (S)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } (R \circ S)_{C,B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Sejam F e G operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$F(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y, 3y + 4z)$$

$$G(x, y, z) = (4x - 2y, 2x + y - 3z, x + 2z) \text{ e } B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1)\} \text{ uma base do } \mathbb{R}^3.$$

Pede-se:

$$\text{a. } G \circ F$$

$$\text{b. } (G \circ F)_B$$

Respostas:

$$\text{a. } (G \circ F)(x, y, z) = (-2x + 10y - 4z, 5x - 6y - 14z, x + 8y + 7z)$$

$$\text{b. } (G \circ F)_B = \begin{pmatrix} -61 & -50 & 42 \\ 41 & 35 & -23 \\ -35 & -31 & 25 \end{pmatrix}$$

13. Determine a imagem da Figura 6.2

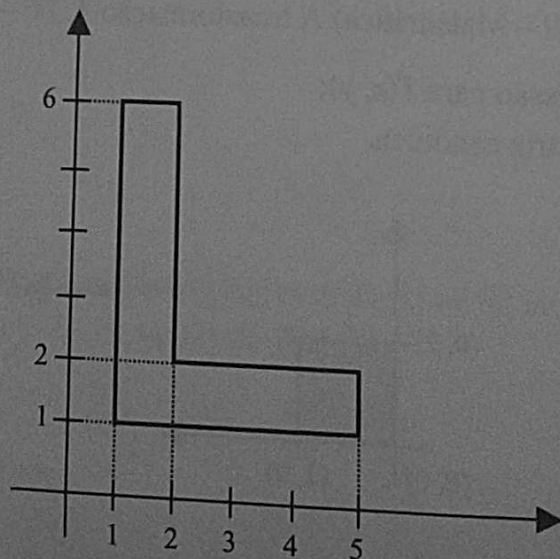


Figura 6.2

pela transformação:

- a. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x + y, y)$
- b. $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, G(x, y) = (x, 2y)$
- c. $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x, y) = (x + 1, y + 2)$

14. Com base nos dados do exercício anterior, calcule a composição $H \circ G \circ F$, e faça a figura resultante.
15. Determine a imagem da figura pela transformação (rotação)
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ sendo $\theta = 30^\circ$.

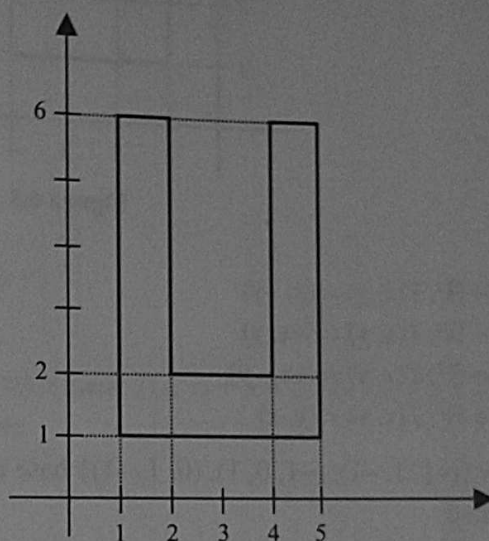


Figura 6.3

16. Determine a imagem da figura pela homotetia $T(x, y) = \alpha(x, y)$ de razão α :

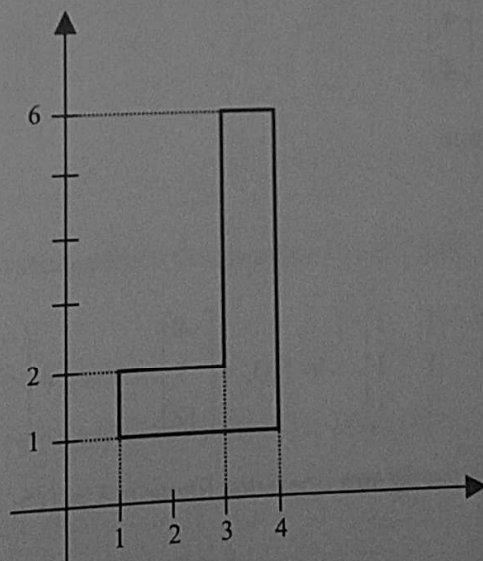


Figura 6.4

- a. $\alpha = 3$
- b. $\alpha = -1$
- c. $\alpha = 1/2$
- d. $\alpha = -3$

17. Determine a imagem da figura pela reflexão:

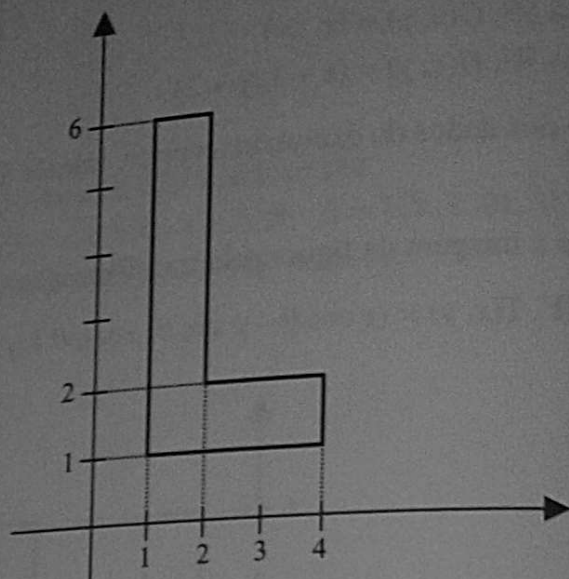


Figura 6.5

- a. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, -y)$
- b. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-x, y)$
- c. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-x, -y)$
- d. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y, x)$

18. Sejam $A = \{(-1, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ e B a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

a. Determine

$$I_A^B$$

b. Determine $(\mathbf{u})_A$, sendo

$$(\mathbf{u})_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c. Determine

$$I_B^A$$

Resposta:

$$\text{a. } I_A^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } (\mathbf{u})_A = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } I_B^A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19. Sejam $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear e $A = \{(5, 1), (-14, -3)\}$ e $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Sendo

$$(F)_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcule $(F)_B$.

Resposta:

$$(F)_B = \begin{pmatrix} -23 & 106 \\ -5 & 23 \end{pmatrix}$$

20. Sendo $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -1)\}$ e $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$, pede-se:

a. determine

$$I_A^B$$

b. determine $(\mathbf{u})_A$, sendo

$$(\mathbf{u})_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$\text{a. } I_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b. } (\mathbf{u})_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

21. Sejam $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$ e $A = \{(1, -1), (0, 1)\}$ e $B = \{(1, 2), (1, 1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$, pede-se:

a. $(T)_A$

b. I_A^B e I_B^A

Resposta:

$$\text{a. } (T)_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } I_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } I_B^A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 7 Diagonalização

1. Verifique se $(0, 0, 4)$ é um vetor próprio do operador linear do $\mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (y, x, 2z)$

Resposta:

É vetor próprio com valor próprio igual a 2.

2. Verifique se $(1, 0, 0)$ é um vetor próprio do operador $T(x, y, z) = (y, x, 3z)$

Resposta:

Não é vetor próprio.

3. Verifique se 3 é um valor próprio do operador $T(x, y, z) = (y, x, 3z)$.

Resposta:

3 é valor próprio para o vetor $(0, 0, z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

4. Para as matrizes a seguir, pede-se:

(i) valores e vetores próprios

(ii) A é diagonalizável? Justifique. Se for, determine as matrizes D e M de modo que

$$D = M^{-1} A M.$$

a. $A = (T)$, em que $T(x, y, z) = (x, 0, z)$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Respostas:

a. (i) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (0, 1, 0)$

$\lambda_2 = 1$, (raiz dupla), $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$

(ii) A é diagonalizável, pois existe uma base de vetores próprios.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. (i) $\lambda_1 = 0$, (raiz dupla), $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (3, 0, 1)$

$\lambda_2 = 2$, $v_3 = (-1, 1, -1)$

(ii) A é diagonalizável, pois existe uma base formada pelos vetores próprios

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c. (i) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (1, 1, 1)$

$\lambda_2 = 2$, (raiz dupla) $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$

(ii) A é diagonalizável, pois os vetores próprios formam uma base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d. (i) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (1, 3, 1)$

$\lambda_2 = 2$, $v_2 = (0, 1, 1)$

$\lambda_3 = 3$, $v_3 = (0, 0, 1)$

(ii) é diagonalizável, pois existem 3 valores próprios distintos

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Para os operadores a seguir, pede-se:

(i) valores e vetores próprios

(ii) T é diagonalizável? Justifique. Se for, determine as matrizes D e M de modo que $D = M^{-1}AM$.

a. $T(x, y, z) = (3x + y, y - z, 2y + 4z)$

b. $T(x, y, z) = (-x, 2x + y + z, x + z)$

Resposta:

a. (i) $\lambda_1 = 2, v_1 = (-1, 1, -1)$

$\lambda_2 = 3$, (raiz dupla) $v_2 = (1, 0, 0)$

(ii) T não é diagonalizável, pois não existe base formada pelos vetores próprios.

b. (i) $\lambda_1 = -1, v_1 = (-2, 1, 1)$

$\lambda_2 = 2, v_2 = (0, 1, 0)$

$\lambda_3 = 1, v_3 = (0, -1, 1)$

(ii) $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Capítulo 8 Produto interno

1. Sendo V um espaço vetorial e $u, v \in V$ tal que

$\|u\| = 4, \|v\| = 3,$

$\theta = \text{âng}(u, v) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, w = u + 3v, z = 2u - v$, calcule:

a. $w \cdot z$ b. $\|w\|$ c. $\|z\|$ d. $\cos \alpha$, sendo $\alpha = \text{âng}(w, z)$

Respostas:

a. $w \cdot z = 35$

b. $\|w\| = \sqrt{133}$

c. $\|z\| = 7$

d. $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{133}}$

2. Sendo $u = (a, 2, -1)$ e $v = (3, a, 30)$ vetores do $\mathbb{R}^3$, calcule a para que eles sejam ortogonais.

Resposta:

$a = 6$

3. Sendo $u = (p, -3, 1)$ e $v = (1, q, 1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$, determine a relação entre p e q para que $u \perp v$.

Resposta:

$p - 3q + 4 = 0$

4. Sendo $u = (1, 1, 0)$ e $v = (1, 2, 2)$ vetores do $\mathbb{R}^3$, determine um vetor w , unitário, que seja ortogonal aos vetores u e v ($w \perp u$ e $w \perp v$).

Resposta:

$w = \pm \frac{1}{3} (2, -2, 1)$

5. Sendo $B = \{(1, 2, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ base não-ortogonal do $\mathbb{R}^3$, pede-se:
- construa, a partir da base B , uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, B'' , usando o método dado no texto (de Gram-Schmidt);
 - determine as coordenadas do vetor $w = (3, -6, 9)$ em relação à base construída no item a.

Respostas:

$$a. B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

- b. denotando a primeira, segunda e terceira coordenadas do vetor w na base B'' respectivamente por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ temos, conforme a teoria:

$$\alpha_1 = (3, -6, 9) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) = -\frac{9}{\sqrt{5}}$$

o mesmo para α_2, α_3 , obtemos:

$$\alpha_2 = \frac{7}{\sqrt{5}}, \alpha_3 = 10.$$

6. Sendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ subespaço do $\mathbb{R}^3$, pede-se:

- construa, a partir da base B de V , uma base ortonormal B'' de V ;
- dado $v = (-1, 5, 3) \in V$ (verifique), calcule $(v)_{B''}$ (vetor-coluna ou vetor-linha das coordenadas de v na base B'' de V obtida no item a).

Respostas:

$$a. B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

- b. Conforme o Exercício 5b, temos:

$$(v)_{B''} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ ou } (v)_{B''} = (2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$$

7. Sendo $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, 1)$ vetores LI do $\mathbb{R}^4$, e denominando V o espaço gerado por eles, isto é, $V = [v_1, v_2, v_3]$, pede-se:

- uma base ortonormal de V (B'')
- sendo $v = (3, 4, 3, 5) \in V$ (verifique), determine $(v)_{B''}$ (vetor-linha ou vetor-coluna das coordenadas de v em relação à base B'' de V obtida no item a).

Respostas:

$$a. B'' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \right) \right\}$$

$$b. (v)_{B''} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{3}} \\ \frac{13\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ \frac{12\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ ou } (v)_{B''} = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{13\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}, \frac{12\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \right)$$

8. Sendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x\}$ subespaço do $\mathbb{R}^3$, determine $V^\perp$.

Resposta:

$$V^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 3b = 0 \text{ e } c = 0\}$$

9. Sendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x \text{ e } z = 4x\}$ subespaço do $\mathbb{R}^3$, determine:

a. $V^\perp$

b. uma base ortonormal de $V^\perp(B'')$

Respostas:

a. $V^\perp = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 3b + 4c = 0\}$

b. $B'' = \left\{ \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{13}}, -\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \right) \right\}$

10. Sendo $V = [(1, -2, 0, -1)]$ subespaço do $\mathbb{R}^4$, determine:

a. $V^\perp$

b. uma base ortonormal de $V^\perp(B'')$

Respostas:

a. $V^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - t = 0\}$

b. $B'' = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0 \right), (0, 0, 1, 0), \left(\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, -\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, 0, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \right) \right\}$

Capítulo 9 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

1. Determine $L(f(x))$ em cada caso dado a seguir:

a. $L = 2D - I, f(x) = 4x^3 + e^{2x}$

b. $L = D^2 - 5D + 6I, f(x) = \sin 2x - 2e^{-3x}$

c. $L = D^3 - 2D^2 + D, f(x) = 2x^5 + \cos 3x$

d. $L = D^4 - 3D + 2I, f(x) = e^{3x}$

e. $L = D^2 - 4D + 5I, f(x) = e^{2x} \sin x$; neste item, determine a relação entre $f(x)$ e o núcleo de L .

Respostas:

a. $24x^2 - 4x^3 + 3e^{2x}$

b. $-3 \sin 2x - 10 \cos 2x - 50e^{-3x}$

c. $10x^4 - 80x^3 + 120x^2 + 24 \sin 3x + 18 \cos 3x$

d. $55e^{3x}$

e. 0; como $L(f(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, vem que $f(x) \in N(L)$

2. Decomponha cada operador dado no produto de operadores "mais simples" (de grau menor):

a. $L = D^2 - 2D - 35I$

b. $L = D^2 + 8D + 16I$

c. $L = D^2 + 4D + 3I$

d. $L = D^2 - 2D$

e. $L = D^3 + 3D^2 - 4D - 12I$

f. $L = D^3 - 2D^2 - 3D$

g. $L = D^4 - 16I$

Respostas:

a. $(D + 5I)(D - 7I)$

b. $(D + 3I)(D + 3I) = (D + 3I)^2$

c. $(D + I)(D + 3I)$

d. $D(D - 2I)$

e. $(D - 2I)(D + 2I)(D + 3I)$

f. $D(D - 3I)(D + I)$

g. $(D - 2I)(D + 2I)(D^2 + 4I)$

3. Realize as operações indicadas para os operadores dados:

$L_1 = D^2 + 2D, L_2 = D^3 + D^2 + 3I$

a. $L_1 \cdot L_2$ b. L_1^3 c. L_2^2

Respostas:

a. $D^5 + 3D^4 + 4D^3 + 3D^2$

b. $D^6 + 6D^5 + 12D^4 + 8D^3$

c. $D^6 + 2D^5 + 2D^4 + D^3 + 6D^2 + 9I$

4. Verifique, em cada caso, que a função dada é solução da equação diferencial dada:

a. $y'' + 8y' + 12y = 0, f(x) = e^{-2x}$

b. $y'' - \sqrt{5}y' = 0, f(x) = 2e^{\sqrt{5}x}$

c. $y'' - 10y' + 25y = 0, f(x) = 2xe^{5x}$

d. $y'' + 9y = 0, f(x) = \cos 3x$

e. $y'' - 3y' + 2y = 0, f(x) = 2e^x + e^{2x}$

f. $y'' - 4y' + 5y = 0, f(x) = e^{2x} \sin x$

g. $y'' - y = 0, f(x) = 3e^x$

5. Para cada um dos operadores lineares dados, determine:

(i) a equação diferencial homogênea originada

(ii) resolva a equação diferencial

a. $D - \sqrt{2}I$

b. $D + \pi I$

c. $D^2 + 6D - 16I$

d. $D^2 - 5D$

e. $D^2 - 3I$

f. $D^2 + 8D + 16I$

g. $D^2 - 2D - I$

h. $D^2 + 2D + 5I$

Respostas:

a. (i) $y' - \sqrt{2}y = 0$

b. (i) $y' + \pi y = 0$

c. (i) $y'' + 6y' - 16y = 0$

(ii) $y = ce^{\sqrt{2}x}$

(ii) $y = ce^{-\pi x}$

(ii) $y = c_1 e^{-8x} + c_2 e^{2x}$

d. (i) $y'' + 5y' = 0$

e. (i) $y'' + 3y = 0$

f. (i) $y'' + 8y' + 16y = 0$

g. (i) $y'' - 2y' - y = 0$

h. (i) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(ii) $y = c_1 + c_2 e^{5x}$

(ii) $y = c_1 e^{-\sqrt{3}x} + c_2 e^{\sqrt{3}x}$

(ii) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{4x}$

(ii) $y = c_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + c_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$

(ii) $y = e^{-x} (c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)$

6. Para as equações diferenciais homogêneas a seguir, pede-se:

(i) escrever o operador diferencial que originou a equação

(ii) resolver a equação diferencial

a. $y'' + 8y' + 12y = 0$

b. $y'' - \sqrt{5}y' = 0$

c. $y'' - 2y = 0$

d. $y'' + 9y = 0$

e. $y'' - 4y' + 5y = 0$

Respostas:

a. (i) $D^2 + 8D + 12I$

b. (i) $D^2 - \sqrt{5}D$

c. (i) $D^2 - 2I$

d. (i) $D^2 + 9I$

e. (i) $D^2 - 4D + 5I$

(ii) $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-2x}$

(ii) $y = c_1 + c_2 e^{\sqrt{5}x}$

(ii) $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x}$

(ii) $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$

(ii) $y = e^{2x} (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

Transformações geométricas em três dimensões

Para transformações $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ veremos reflexões, rotações, translações e composições dessas transformações.

A1.1 Reflexão

É uma transformação linear que associa a uma figura a sua imagem de espelho em relação a um ponto, uma reta ou um plano.

A1.1.1 Reflexão sobre o plano xy

A matriz de reflexão sobre o plano xy é dada pela transformação $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ e pode ser representada pela matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

A reflexão do ponto $P(1, 1, 1)$ sobre o plano xy é o ponto $P'(x', y', z')$ dado por: $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ ou em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Assim, $P'(1, 1, -1)$.

A Figura A1.1 ilustra geometricamente a reflexão.

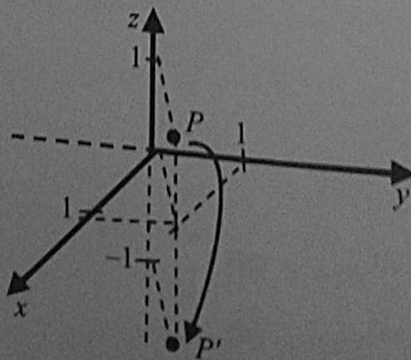


Figura A1.1

A1.1.2 Reflexão sobre o plano xz

A matriz de reflexão sobre o plano xz é dada pela transformação $T(x, y, z) = (x, -y, z)$ e pode ser representada pela matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

A reflexão do ponto $P(1, 1, 1)$ sobre o plano xz é o ponto $P'(x', y', z')$, dado por: $T(x, y, z) = (x, -y, z)$, ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Assim, $P'(1, -1, 1)$.

A Figura A1.2 ilustra geometricamente a reflexão.

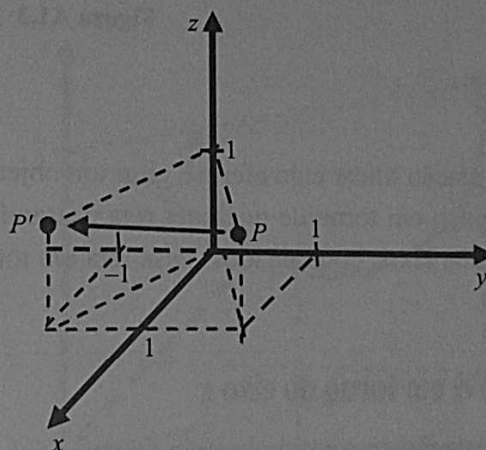


Figura A1.2

A1.1.3 Reflexão sobre o plano yz

A matriz de reflexão sobre o plano yz é dada pela transformação $T(x, y, z) = (-x, y, z)$ e pode ser representada pela matriz

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

A reflexão do ponto $P(1, 1, 1)$ sobre o plano yz é o ponto $P'(x', y', z')$ dado por: $T(x, y, z) = (-x, y, z)$, ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Assim, $P'(-1, 1, 1)$.

A Figura A1.3 ilustra geometricamente a reflexão.

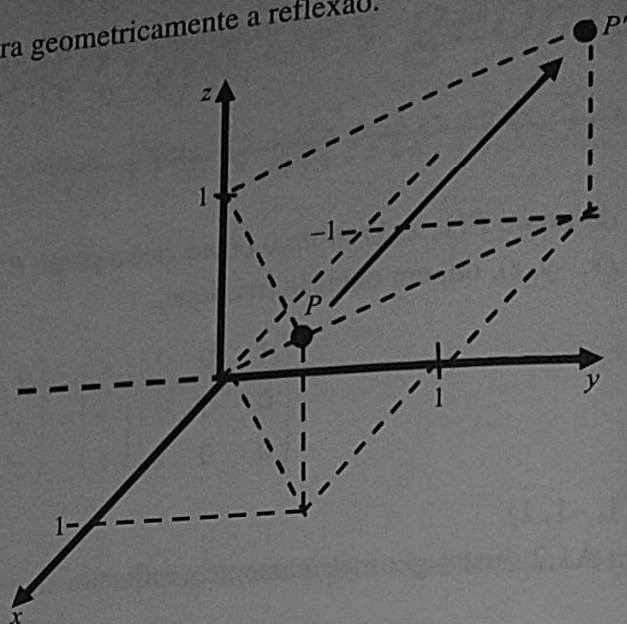


Figura A1.3

A1.2 Rotação

É uma transformação linear cujo efeito é girar um objeto em torno de um eixo. Podemos realizar rotações no espaço em torno de qualquer reta passando pela origem. Trabalharemos com rotações em torno dos eixos coordenados. Essa reta em torno da qual faremos a rotação é chamada eixo de rotação.

A1.2.1 Rotação de ângulo α em torno do eixo z

Podemos ter a rotação em sentido horário ou anti-horário.

a. Sentido anti-horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo z , no sentido anti-horário, é dada por:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo z é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 45^\circ$ em torno do eixo z , no sentido anti-horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,7 & 0 \\ 0,7 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,7 \cdot 1 - 0,7 \cdot 2 = x' \\ 0,7 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 = y' \\ 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -0,7 \\ y' = 2,1 \\ z' = 2 \end{cases}$$

Logo, $P'(-0,7, 2,1, 2)$

A Figura A1.4 ilustra geometricamente a rotação.

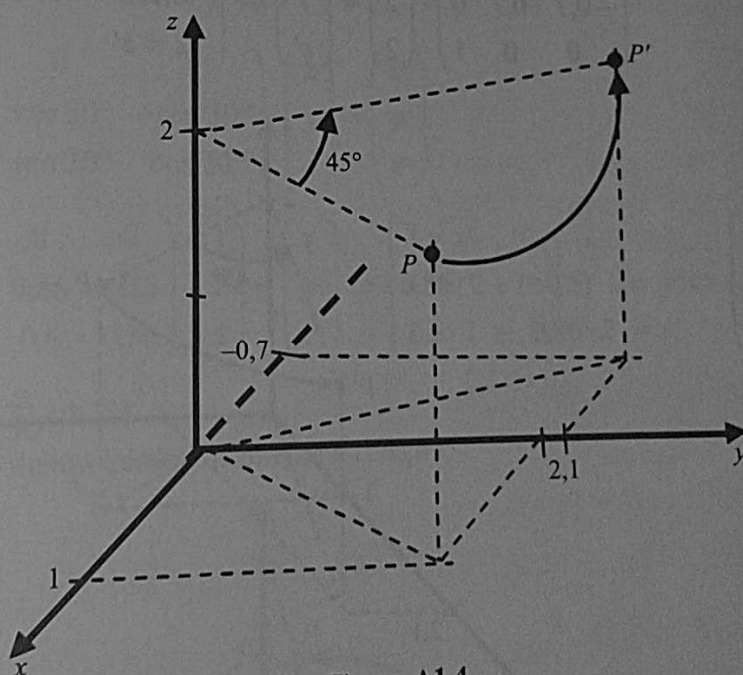


Figura A1.4

b. Sentido horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo z , no sentido horário, é dada por:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação, devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo z é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 45^\circ$ em torno do eixo z , no sentido horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,7 & 0 \\ -0,7 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,7 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 = x' \\ -0,7 \cdot 1 + 0,7 \cdot 2 = y' \\ 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \cdot 1 \\ y' = 0 \cdot 7 \\ z' = 2 \end{cases}$$

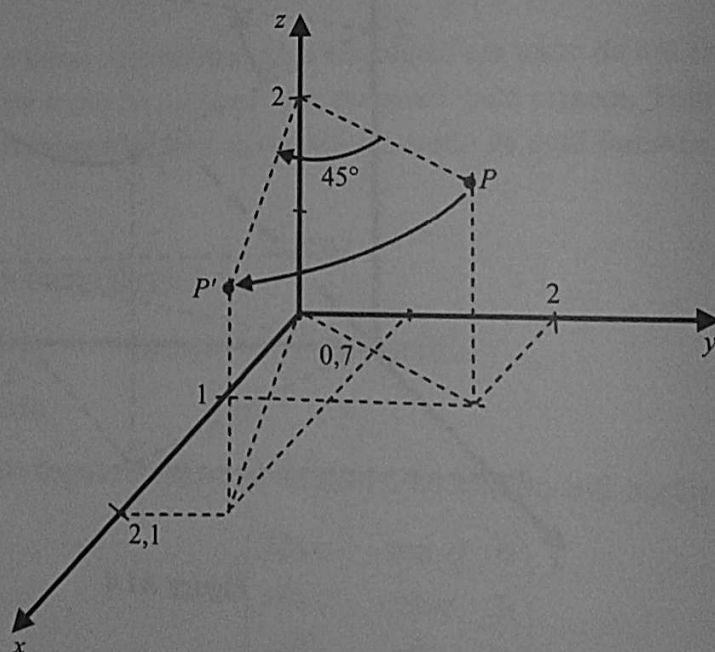


Figura A1.5

A1.2.2 Rotação de ângulo α em torno do eixo x

Podemos ter a rotação em sentido horário ou anti-horário.

a. Sentido anti-horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo x , no sentido anti-horário, é dada por:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação, devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo x é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

1. Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 30^\circ$ em torno do eixo x , no sentido anti-horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 & \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = x' \\ 0,86 \cdot 2 + (-0,5) \cdot 2 = y' \\ 0,5 \cdot 2 + 0,86 \cdot 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0,72 \\ z' = 2,72 \end{cases}$$

Logo, $P'(1, 0,72, 2,72)$

A Figura A1.6 ilustra geometricamente a rotação.

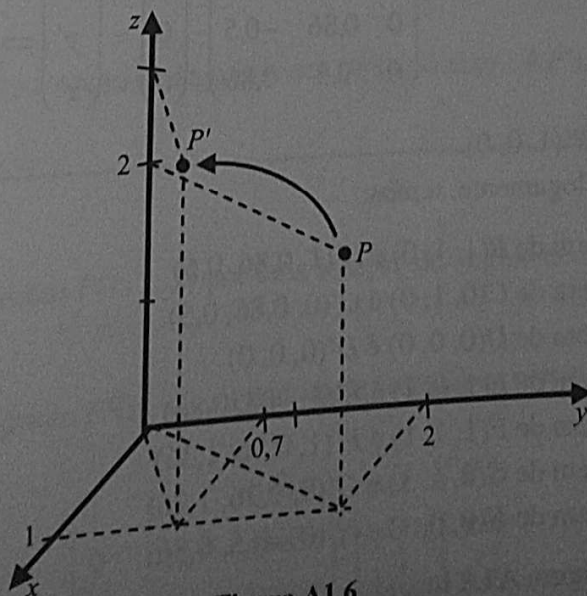


Figura A1.6

2. Determine a imagem da figura $ABCDEFGH$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 30^\circ$ em torno do eixo x , no sentido anti-horário.

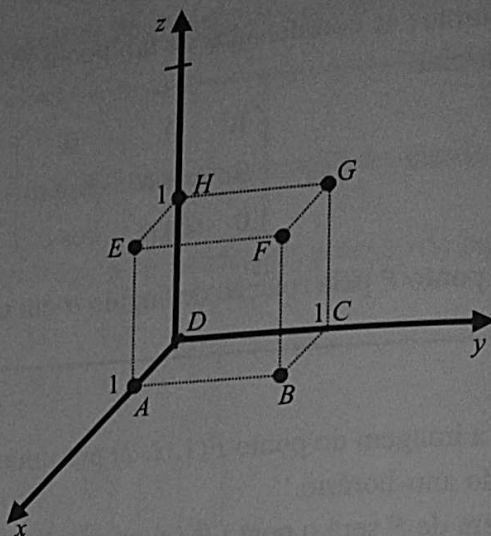


Figura A1.7

A imagem dos pontos será dada pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ 0 & \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = x' \\ 0 = y' \\ 0 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Logo, $P'(1, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

- a imagem de $B(1, 1, 0)$ é $B'(1, 0,86, 0,5)$
- a imagem de $C(0, 1, 0)$ é $C'(0, 0,86, 0,5)$
- a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(0, 0, 0)$
- a imagem de $E(1, 0, 1)$ é $E'(1, -0,5, 0,86)$
- a imagem de $F(1, 1, 1)$ é $F'(1, 0,36, 1,36)$
- a imagem de $G(0, 1, 1)$ é $G'(0, 0,36, 1,36)$
- a imagem de $H(0, 0, 1)$ é $H'(0, -0,5, 0,86)$

A Figura A1.8 ilustra geometricamente a rotação.

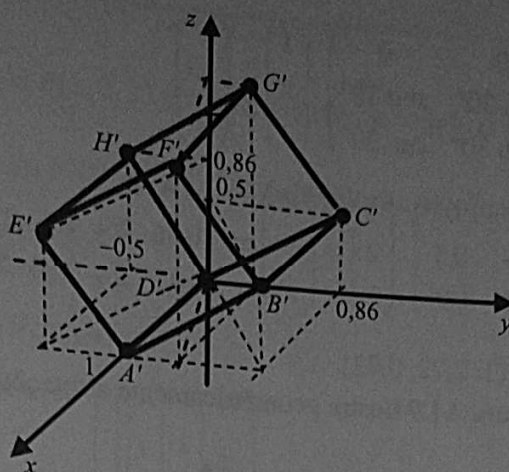


Figura A1.8

b. Sentido horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo x , no sentido horário, é dada por:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação, devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo z é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 30^\circ$ em torno do eixo x , no sentido horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = x' \\ 0,86 \cdot 2 + 0,5 \cdot 2 = y' \\ -0,5 \cdot 2 + 0,86 \cdot 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2,72 \\ z' = 0,72 \end{cases}$$

Logo, $P'(1, 2,72, 0,72)$.

A Figura A1.9 ilustra geometricamente a rotação.

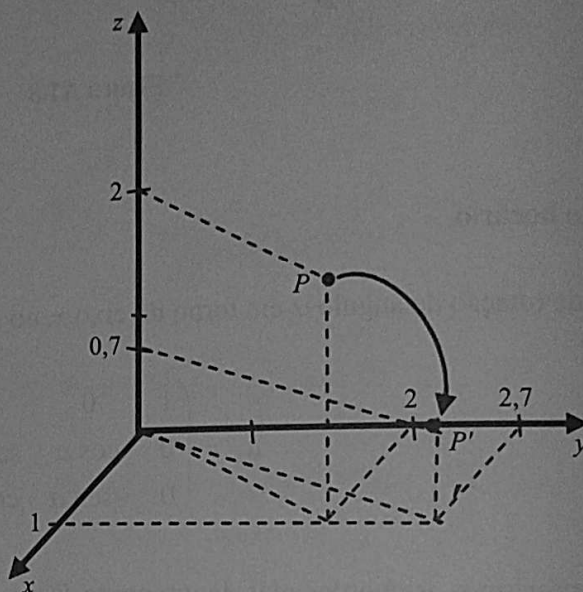


Figura A1.9

A1.2.3 Rotação de ângulo α em torno do eixo y

Podemos ter a rotação em sentido horário ou anti-horário.

a. Sentido anti-horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo y , no sentido anti-horário, é dada por:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação, devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo y é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 30^\circ$ em torno do eixo y , no sentido anti-horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & -\sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,86 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,86 \cdot 1 + (-0,5) \cdot 2 = x' \\ 2 = y' \\ 0,5 \cdot 1 + 0,86 \cdot 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -0,14 \\ y' = 2 \\ z' = 2,22 \end{cases}$$

Logo, $P'(-0,14, 2, 2,22)$.

A Figura A1.10 ilustra geometricamente a rotação.

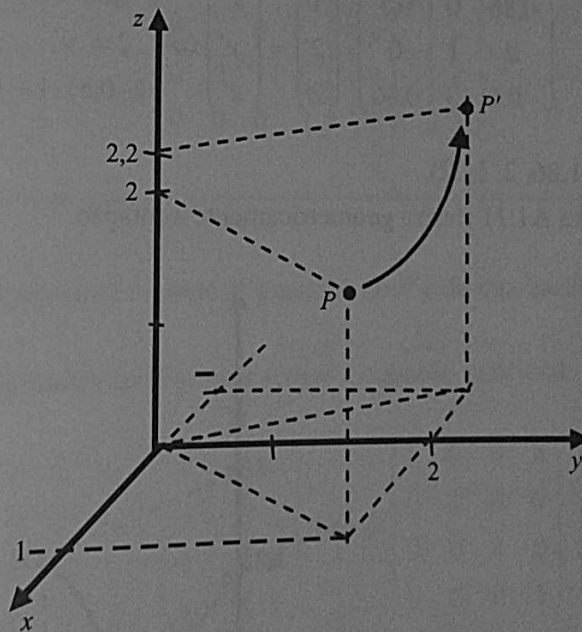


Figura A1.10

b. Sentido horário

A matriz de rotação de ângulo α em torno do eixo y , no sentido horário, é dada por:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Para determinarmos as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ após essa rotação, devemos resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

A imagem do ponto P pela rotação de ângulo α em torno do eixo y é $P'(x', y', z')$.

EXEMPLO

Determine a imagem do ponto $P(1, 2, 2)$ por uma rotação de ângulo $\alpha = 30^\circ$ em torno do eixo y , no sentido horário.

A imagem de P será o ponto $P'(x', y', z')$ dado pela solução da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,86 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0,86 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2 = x' \\ 2 = y' \\ (-0,5) \cdot 1 + 0,86 \cdot 2 = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1,86 \\ y' = 2 \\ z' = 1,22 \end{cases}$$

Logo, $P'(1,86, 2, 1,22)$.

A Figura A1.11 ilustra geometricamente a rotação.

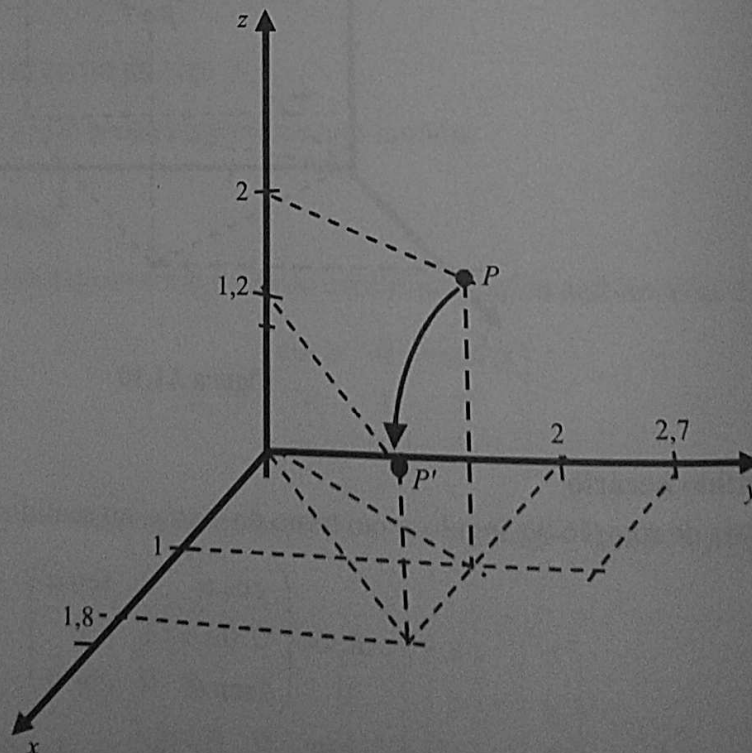


Figura A1.11

A1.3 Translação

É uma transformação (não-linear) que leva um objeto de um lugar a outro, de modo que, dados dois pontos quaisquer do objeto, a direção da reta determinada por eles permanece inalterada após a transformação.

Pela translação, cada ponto $P(x, y, z)$ é levado em um ponto $P'(x', y', z')$ dado por:

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \\ z' = z + t_z \end{cases}$$

onde (t_x, t_y, t_z) é o vetor translação e indica quanto o objeto será deslocado nas direções dos respectivos eixos coordenados.

Para representar matricialmente as translações, torna-se necessária a utilização de coordenadas homogêneas. Coordenadas homogêneas são representações especiais para pontos, vetores e matrizes, utilizadas em computação gráfica, que facilitam as operações com esses elementos.

Assim, um ponto P com coordenadas (x, y, z) será representado por $P(x, y, z, 1)$.

Logo, a equação matricial correspondente a uma translação será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLOS

1. Sendo $P(1, 2, 3)$, determinar o ponto P' imagem de P pela translação dada pelo vetor $(t_x, t_y, t_z) = (2, 0, 0)$.

Utilizando coordenadas homogêneas temos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $P(1, 2, 3)$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \\ z' = 3 \end{cases}$$

Assim, P' terá coordenadas $(3, 2, 3)$.

A Figura A1.12 ilustra geometricamente a translação.

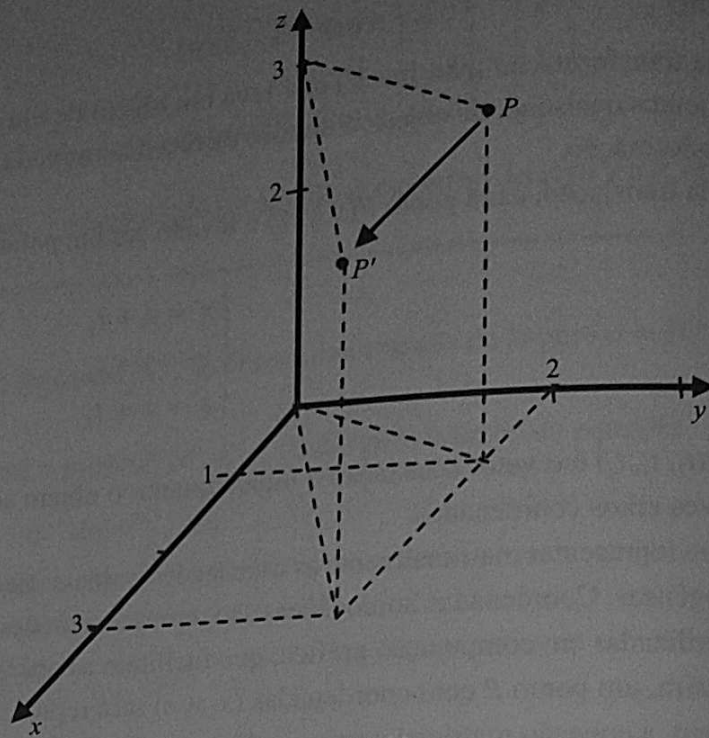


Figura A1.12

2. Considerando a figura $ABCDEFGH$, determine a sua imagem pela translação dada pelo vetor $(t_x, t_y, t_z) = (0, 2, 0)$ (isto é, deslocamento de 2 unidades na direção de y).

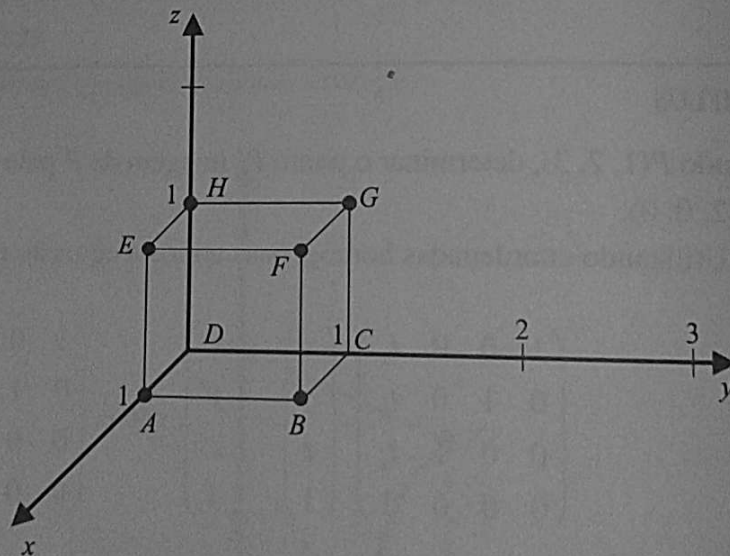


Figura A1.13

Utilizando coordenadas homogêneas, temos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(1, 2, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(1, 1, 0)$ é $B'(1, 3, 0)$

a imagem de $C(0, 1, 0)$ é $C'(0, 3, 0)$

a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(0, 2, 0)$

a imagem de $E(1, 0, 1)$ é $E'(1, 2, 1)$

a imagem de $F(1, 1, 1)$ é $F'(1, 3, 1)$

a imagem de $G(0, 1, 1)$ é $G'(0, 3, 1)$

a imagem de $H(0, 0, 1)$ é $H'(0, 2, 1)$

A Figura A1.14 ilustra geometricamente a translação.

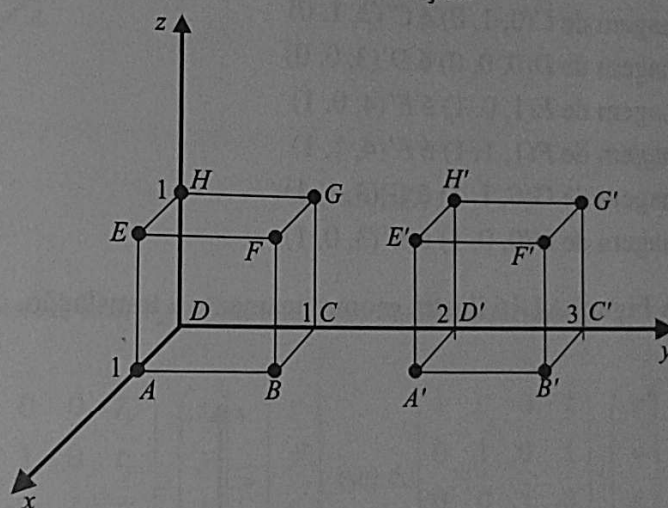


Figura A1.14

3. Considerando a figura $ABCDEFGH$, determine a sua imagem pela translação dada pelo vetor $(t_x, t_y, t_z) = (3, 0, 0)$ (isto é, deslocamento de 3 unidades na direção de x).

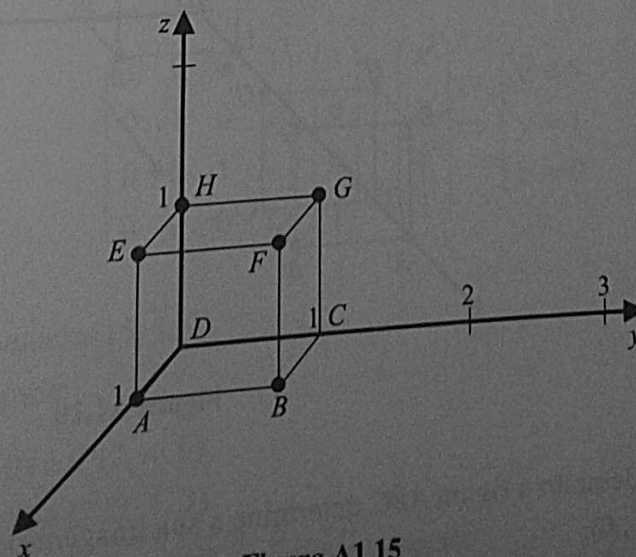


Figura A1.15

Utilizando coordenadas homogêneas, temos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(4, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

- a imagem de $B(1, 1, 0)$ é $B'(4, 1, 0)$
- a imagem de $C(0, 1, 0)$ é $C'(3, 1, 0)$
- a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(3, 0, 0)$
- a imagem de $E(1, 0, 1)$ é $E'(4, 0, 1)$
- a imagem de $F(1, 1, 1)$ é $F'(4, 1, 1)$
- a imagem de $G(0, 1, 1)$ é $G'(3, 1, 1)$
- a imagem de $H(0, 0, 1)$ é $H'(3, 0, 1)$

A Figura A1.16 ilustra geometricamente a translação.

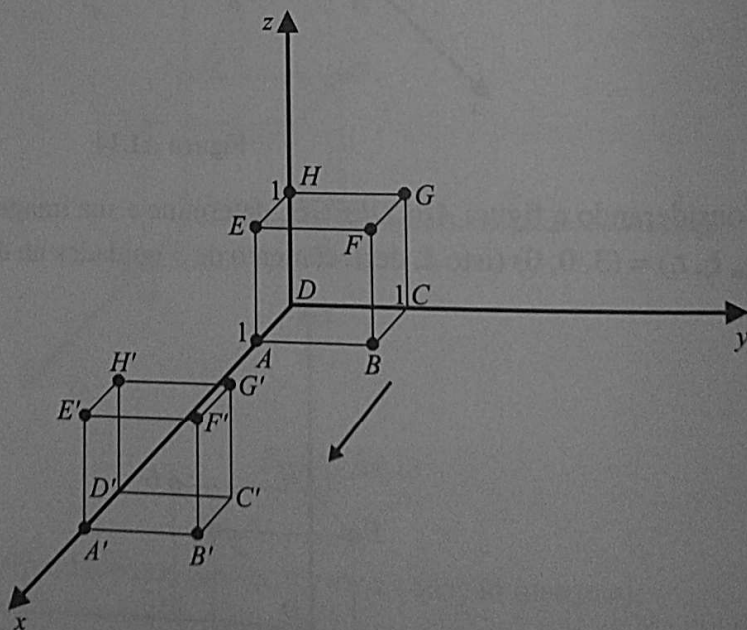


Figura A1.16

4. Considerando a figura ABC determine a sua imagem pela translação dada pelo vetor $(t_x, t_y, t_z) = (2, 1, 0)$.

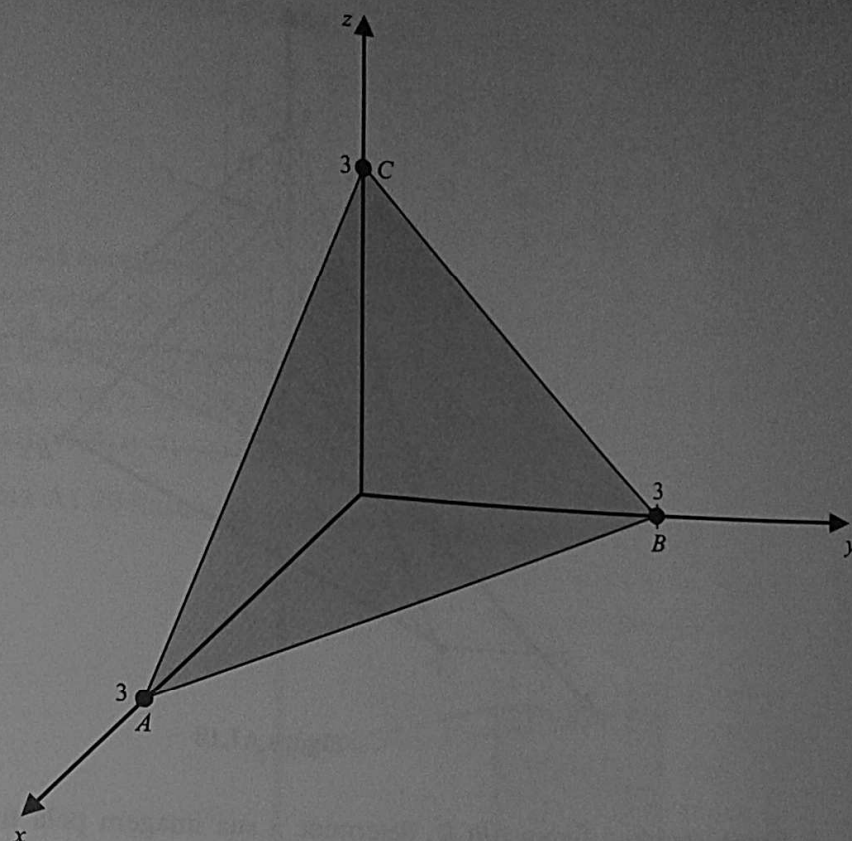


Figura A1.17

Utilizando coordenadas homogêneas, temos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(3, 0, 0)$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(5, 1, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 3, 0)$ é $B'(2, 4, 0)$

a imagem de $C(0, 0, 3)$ é $C'(2, 1, 3)$

A Figura A1.18 ilustra geometricamente a translação.

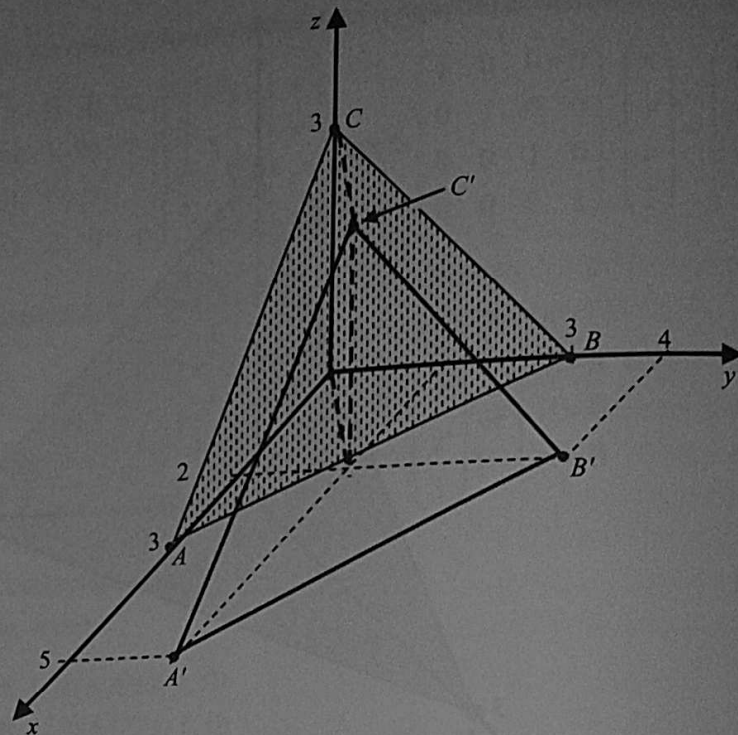


Figura A1.18

5. Considerando a figura $ABCD$, determine a sua imagem pela translação dada pelo vetor $(t_x, t_y, t_z) = (-1, 2, 2)$.

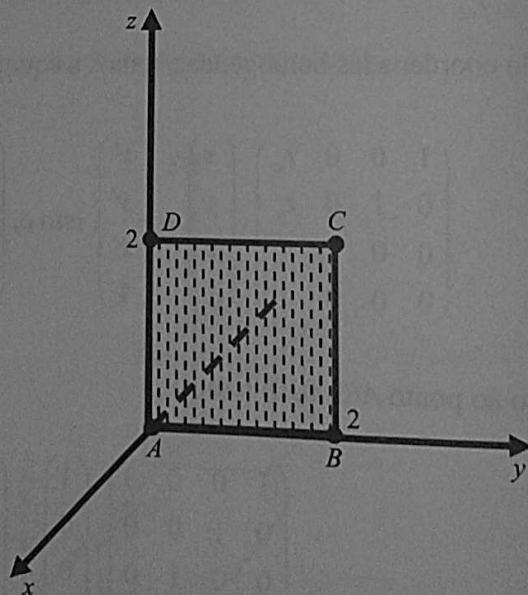


Figura A1.19

Utilizando coordenadas homogêneas, temos a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(0, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \\ z' = 2 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(-1, 2, 2)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 2, 0)$ é $B'(-1, 4, 2)$

a imagem de $C(0, 2, 2)$ é $C'(-1, 4, 4)$

a imagem de $D(0, 0, 2)$ é $D'(-1, 2, 4)$

A Figura A1.20 ilustra geometricamente a translação.

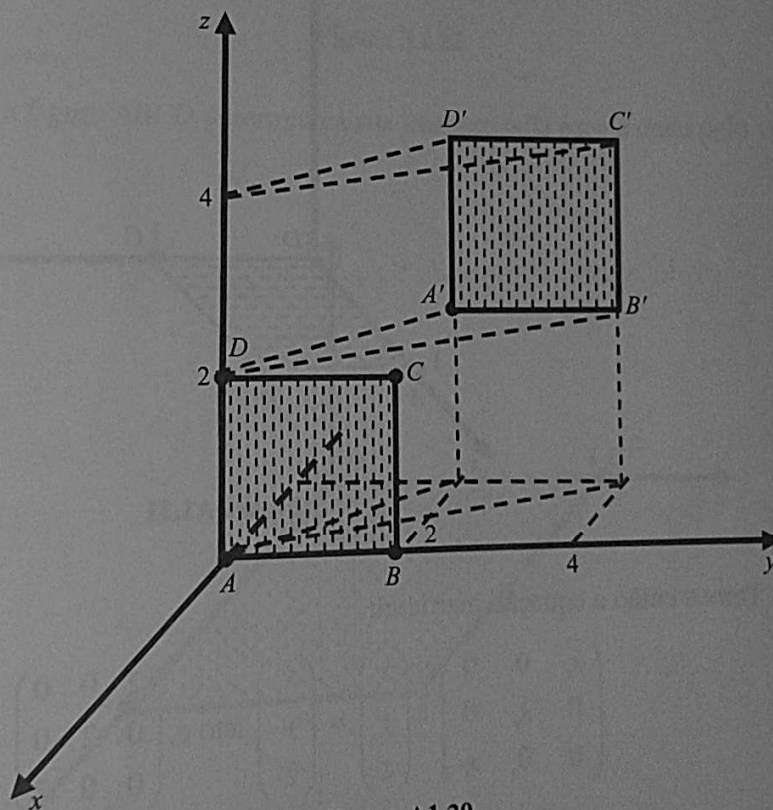


Figura A1.20

Observação: Na reflexão, na rotação e na translação, as distâncias entre os pontos da figura são mantidas (não se modificam).

A1.4 Escala (homotetia)

É uma transformação que permite ampliar ou reduzir uma figura semelhante à figura original. Pela escala, cada ponto $P(x, y, z)$ é levado em um ponto $P'(x', y', z')$ dado por:

$$\begin{cases} x' = x \cdot s_x \\ y' = y \cdot s_y \\ z' = z \cdot s_z \end{cases}$$

em que (s_x, s_y, s_z) é o vetor escala: s_x é a escala aplicada na direção x , s_y é a escala aplicada na direção y , s_z é a escala aplicada na direção z .

Logo, a equação matricial correspondente a uma escala será:

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

EXEMPLOS

1. Considerando a figura $ABCD$, determine a sua imagem pela escala dada pelo vetor $(s_x, s_y, s_z) = (2, 2, 2)$.

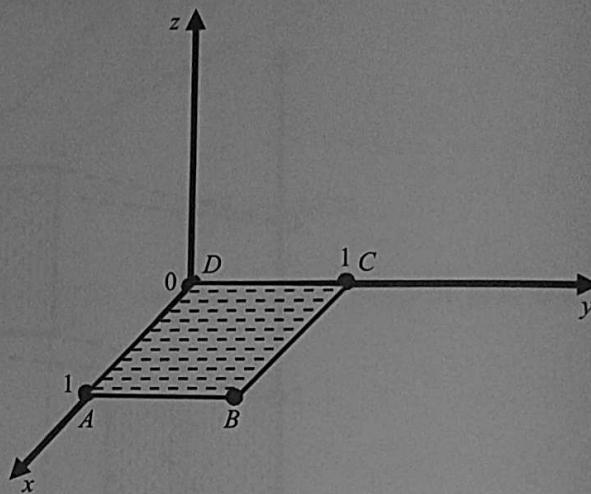


Figura A1.21

Temos então a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(2, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(1, 1, 0)$ é $B'(2, 2, 0)$

a imagem de $C(0, 1, 0)$ é $C'(0, 2, 0)$

a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(0, 0, 0)$

A Figura A1.22 ilustra geometricamente a escala.

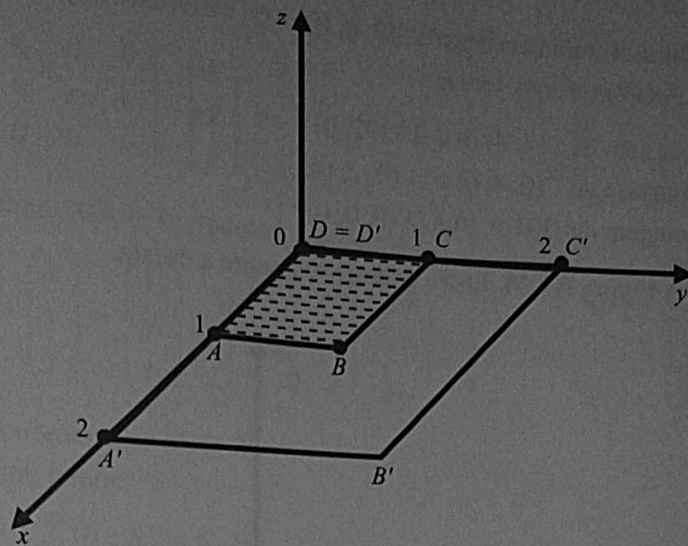


Figura A1.22

2. Considerando a figura $ABCD$ determine a sua imagem pela escala dada pelo vetor $(s_x, s_y, s_z) = (1/2, 1/2, 1/2)$.

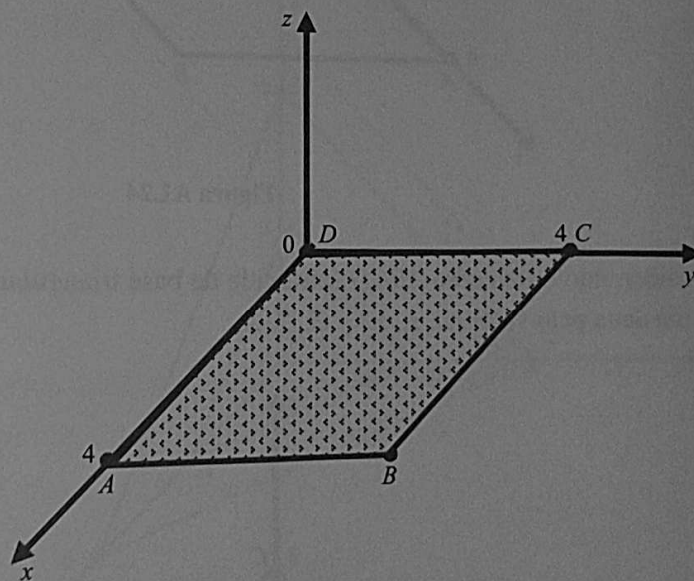


Figura A1.23

Temos então a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(4, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(2, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(4, 4, 0)$ é $B'(2, 2, 0)$

a imagem de $C(0, 4, 0)$ é $C'(0, 2, 0)$

a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(0, 0, 0)$

A Figura A1.24 ilustra geometricamente a escala.

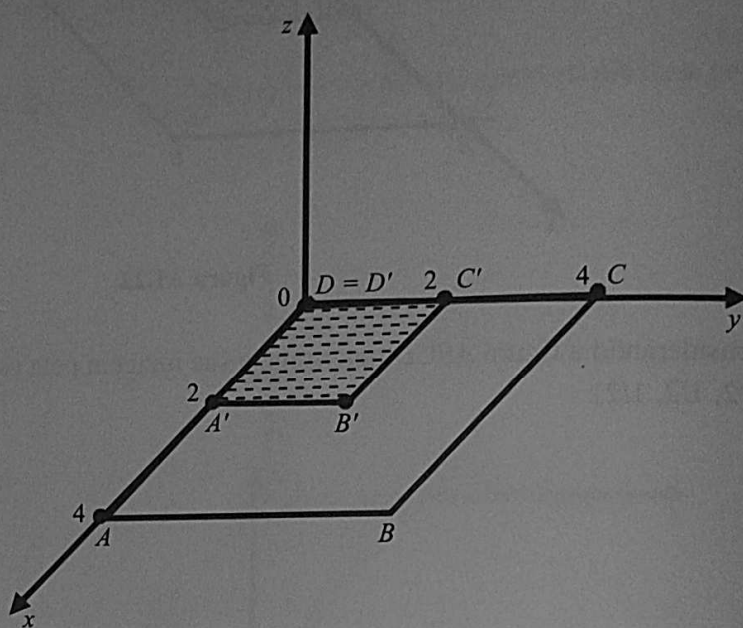


Figura A1.24

3. Considerando o tetraedro $ABCD$ (pirâmide de base triangular), determine a sua imagem pela escala dada pelo vetor $(s_x, s_y, s_z) = (2, 2, 2)$.

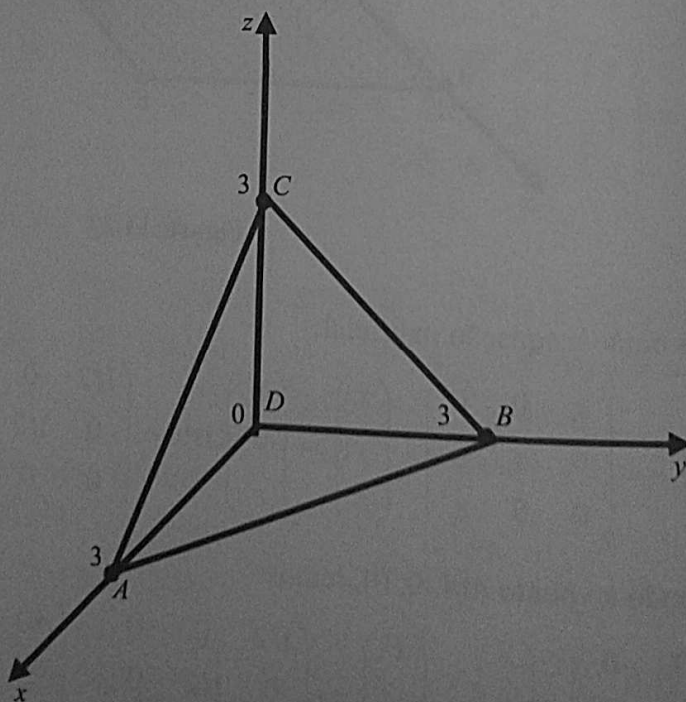


Figura A1.25

Temos então a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(3, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(6, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 3, 0)$ é $B'(0, 6, 0)$

a imagem de $C(0, 0, 3)$ é $C'(0, 0, 6)$

a imagem de $D(0, 0, 0)$ é $D'(0, 0, 0)$

A Figura A1.26 ilustra geometricamente a escala.

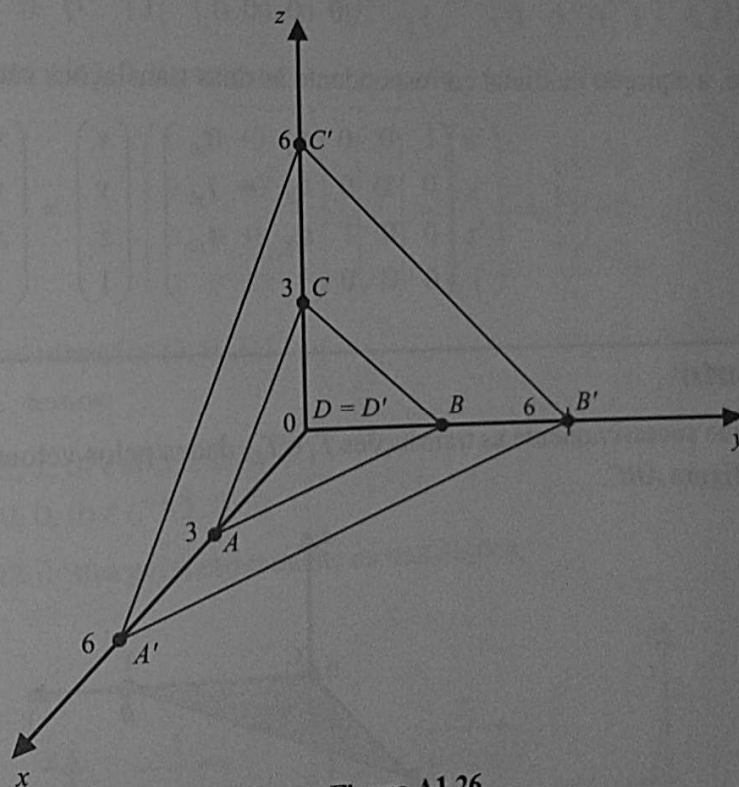


Figura A1.26

Temos então como imagem do tetraedro $ABCD$ o tetraedro ampliado $A'B'C'D'$.

A1.5 Composição de transformações

A1.5.1 Translações sucessivas

Duas translações T_1 e T_2 sucessivas aplicadas a um objeto são equivalentes a uma translação aplicada igual à soma das duas.

Para cada ponto $P(x, y, z)$, teremos a posição final $P'(x', y', z')$, dada por:

$$\begin{cases} x' = x + t_{x1} + t_{x2} \\ y' = y + t_{y1} + t_{y2} \\ z' = z + t_{z1} + t_{z2} \end{cases}$$

Na forma matricial, utilizando coordenadas homogêneas, teremos o produto das matrizes das translações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x2} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y2} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x2} + t_{x1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y2} + t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z2} + t_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz correspondente às duas translações sucessivas será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x2} + t_{x1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y2} + t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z2} + t_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a equação matricial correspondente às duas translações sucessivas será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x2} + t_{x1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y2} + t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z2} + t_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

Aplique sucessivamente as translações T_1 e T_2 , dadas pelos vetores de translação $(2, 0, 0)$ e $(0, 0, 3)$, à figura ABC.

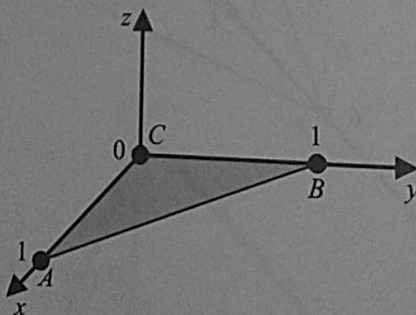


Figura A1.27

Utilizando coordenadas homogêneas, temos a equação matricial para a translação T_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_{x1} \\ 0 & 1 & 0 & t_{y1} \\ 0 & 0 & 1 & t_{z1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ isto é, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Assim, A' terá coordenadas $(3, 0, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 1, 0)$ é $B'(2, 1, 0)$

a imagem de $C(0, 0, 0)$ é $C'(2, 0, 0)$

Devemos agora calcular a transformação T_2 nos pontos A', B' e C' .

A equação matricial para a translação T_2 será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A'(3, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 3 \\ y'' = 0 \\ z'' = 3 \end{cases}$$

Assim, A'' terá coordenadas $(3, 0, 3)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B'(2, 1, 0)$ é $B''(2, 1, 3)$

a imagem de $C'(0, 0, 0)$ é $C''(2, 0, 3)$

A Figura A1.28 ilustra geometricamente as translações.

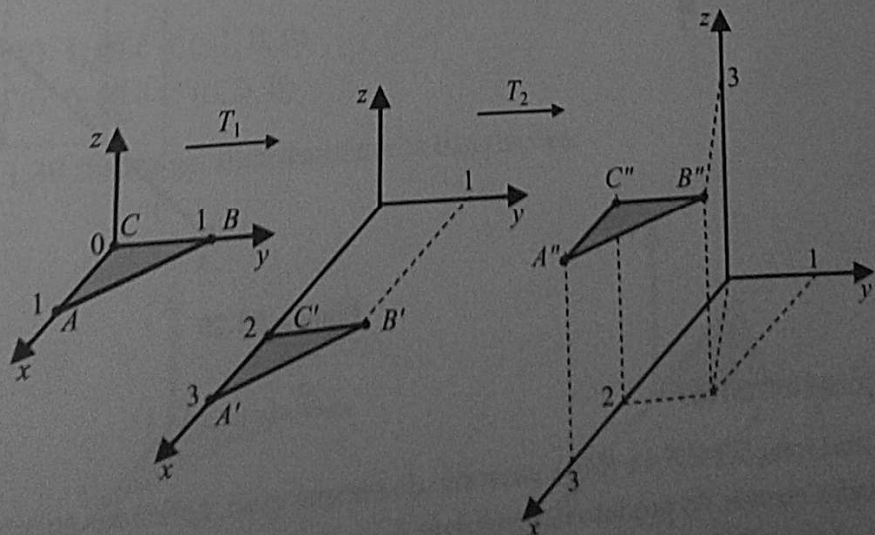


Figura A1.28

Lembremos que a translação $T = T_2 \circ T_1$ tem como vetor translação a soma dos vetores translação de T_1 e T_2 .

Assim, de modo simplificado, fazendo a multiplicação das matrizes de translação, obteremos diretamente a imagem da figura original pelas transformações sucessivas.

Isto é, a equação matricial correspondente às duas translações sucessivas é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 0 \\ z' = 3 \end{cases}$$

Assim, A'' terá coordenadas $(3, 0, 3)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 1, 0)$ é $B''(2, 1, 3)$

a imagem de $C(0, 0, 0)$ é $C''(2, 0, 3)$

A Figura A1.29 ilustra geometricamente as translações.

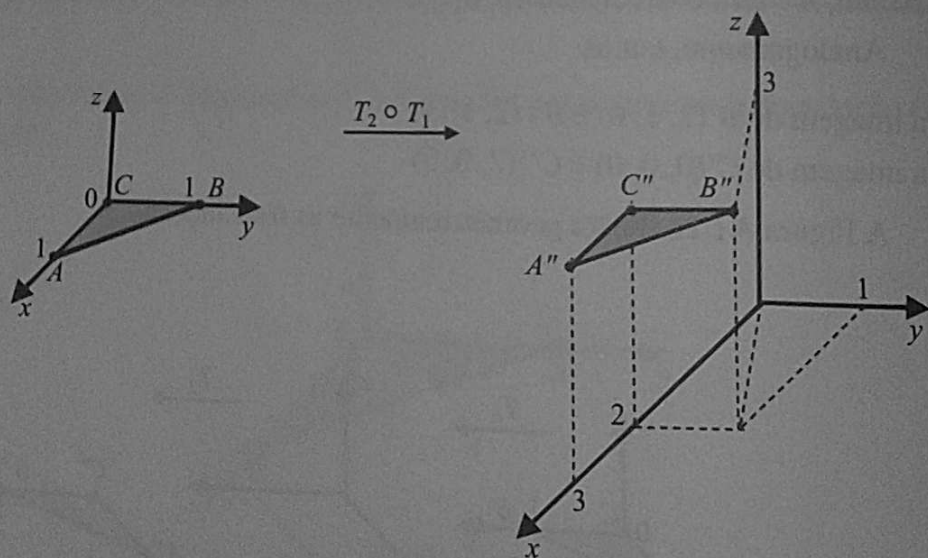


Figura A1.29

A1.5.2 Rotações sucessivas

Duas rotações $R(\theta_1)$ e $R(\theta_2)$, em torno do mesmo eixo, aplicadas sucessivamente a um objeto serão dadas através do produto das matrizes de rotação de cada uma.

Assim, $R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

Se as rotações são em torno do eixo z , dadas as matrizes de rotação

$$R_z(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_z(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que a matriz de rotação das rotações sucessivas é dada pelo produto:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO

Duas rotações sucessivas, em torno do eixo z , $R_z(30^\circ)$ e $R_z(60^\circ)$ aplicadas à figura ABC são equivalentes a uma rotação de $R_z(90^\circ)$.

Assim, a matriz de rotação das duas rotações sucessivas é dada por:

$$R_z(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando ao ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, a imagem de $A(1, 0, 0)$ é $A'(0, 1, 0)$.

Analogamente, temos:

a imagem de $B(0, 1, 0)$ é $B'(-1, 0, 0)$

a imagem de $C(0, 0, 0)$ é $C'(0, 0, 0)$

A Figura A1.30 ilustra geometricamente as translações.

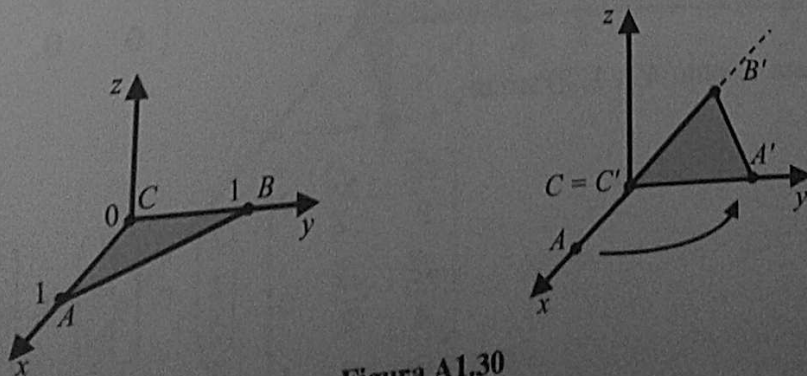


Figura A1.30

A1.6 Exercícios resolvidos

1. Gire a figura $ABCD$, 45° em torno do eixo z (sentido anti-horário).

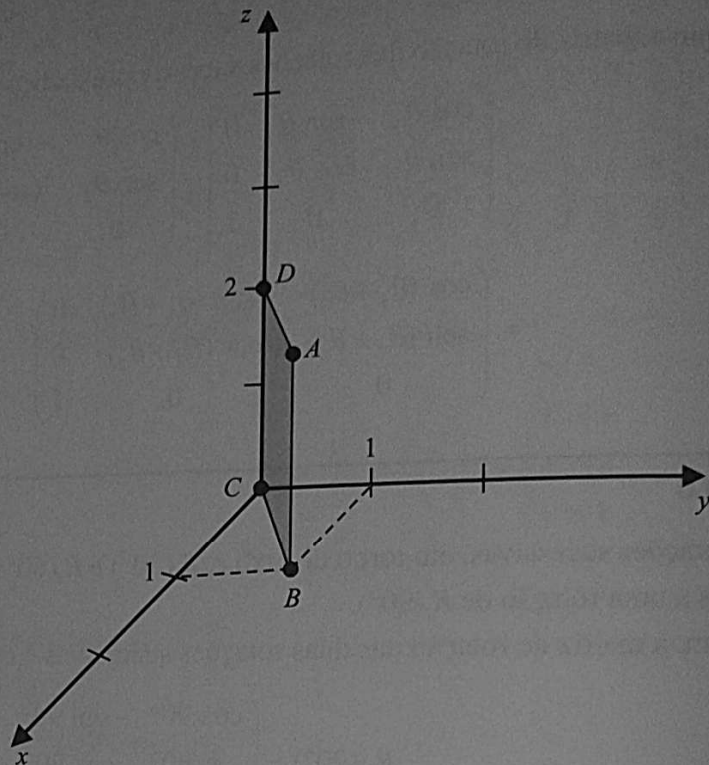


Figura A1.31

Para fazer uma rotação de ângulo α em torno do eixo z (sentido anti-horário) na figura, devemos utilizar a matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para o ponto $A(1, 1, 2)$ temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1,4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Para o ponto $B(1, 1, 0)$ temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1,4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{B}'}$$

Para o ponto $C(0, 0, 0)$ temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{C}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{C}'}$$

Para o ponto $D(0, 0, 2)$, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{D}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{D}'}$$

Temos então a figura $A'B'C'D'$ a seguir.

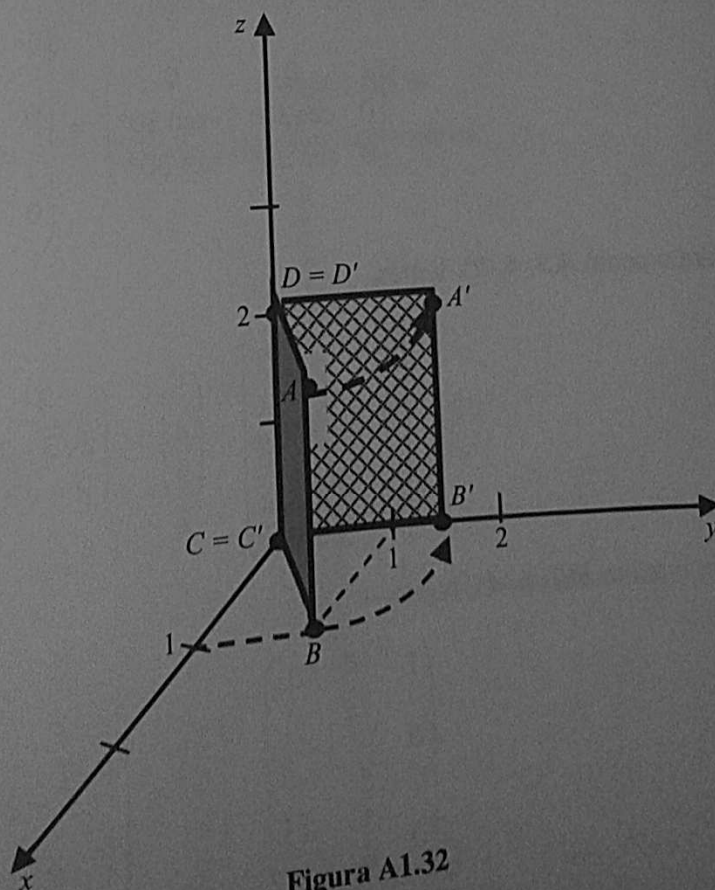


Figura A1.32

2. Gire a figura ABC , 30° em torno do eixo x .

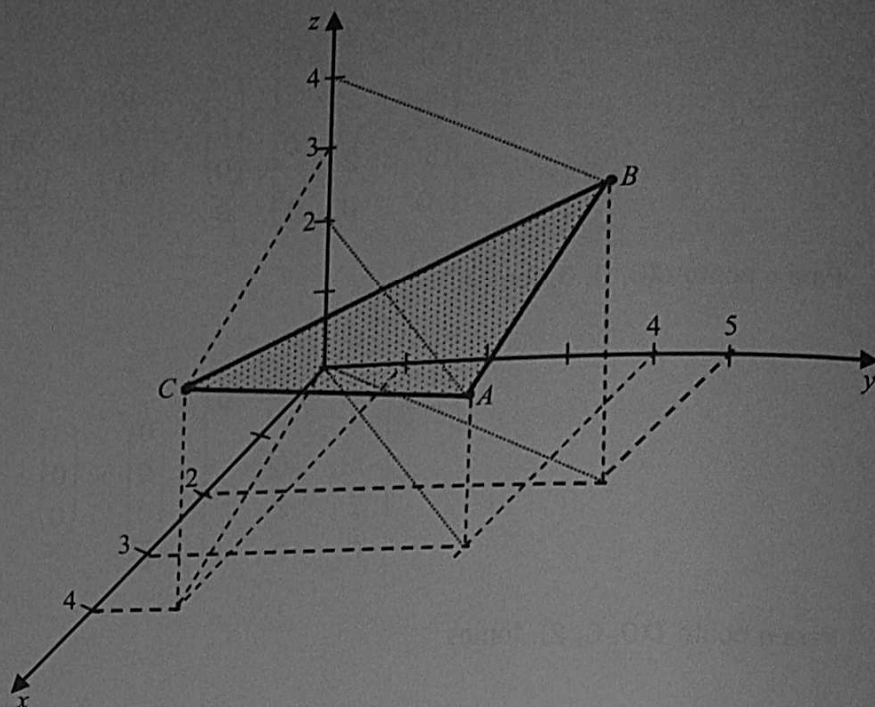


Figura A1.33

Para fazer uma rotação de ângulo α em torno do eixo x na figura devemos utilizar a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 & \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Para o ponto $A(3, 4, 2)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sqrt{3}-1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1,4 \\ 3,7 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Para o ponto $B(2, 5, 4)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}-2 \\ \frac{5}{2}+2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2,75 \\ 7,9 \end{pmatrix}}_{B'}$$

Para o ponto $C(4, 1, 3)$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} - 0,5 \\ \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 4 \\ 1,2 \\ 3,05 \end{pmatrix}_{C'}$$

Temos então a figura $A'B'C'$ a seguir.

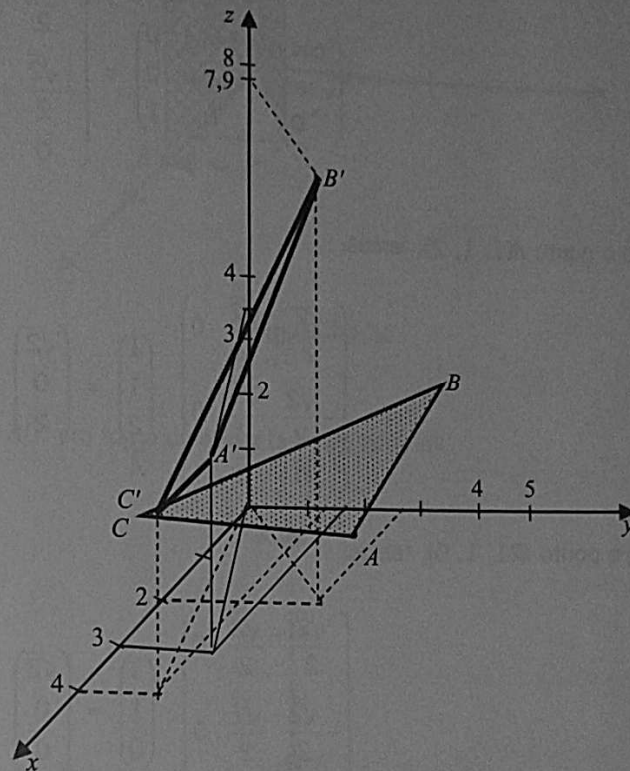


Figura A1.34

3. Gire a figura $ABCD$ 45° em torno do eixo z (sentido horário).

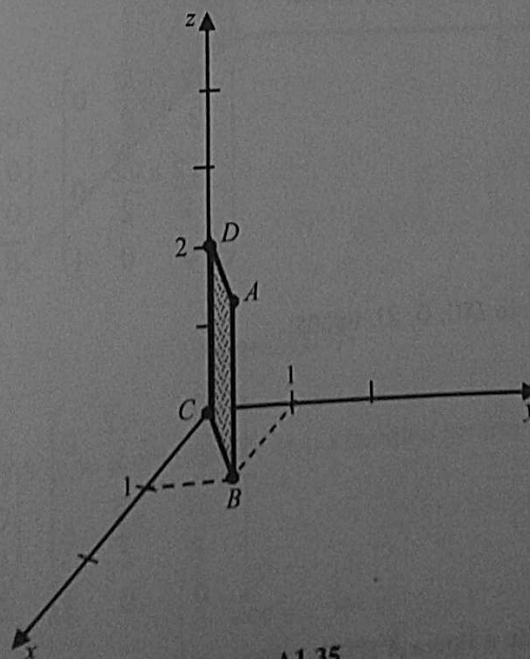


Figura A1.35

Para fazer uma rotação de ângulo α em torno do eixo z (sentido horário) na figura devemos utilizar a matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para o ponto $A(1, 1, 2)$, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Para o ponto $B(1, 1, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B'}$$

Para o ponto $C(0, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C'}$$

Para o ponto $D(0, 0, 2)$, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{D'}$$

Temos então a figura $A'B'C'D'$ a seguir.

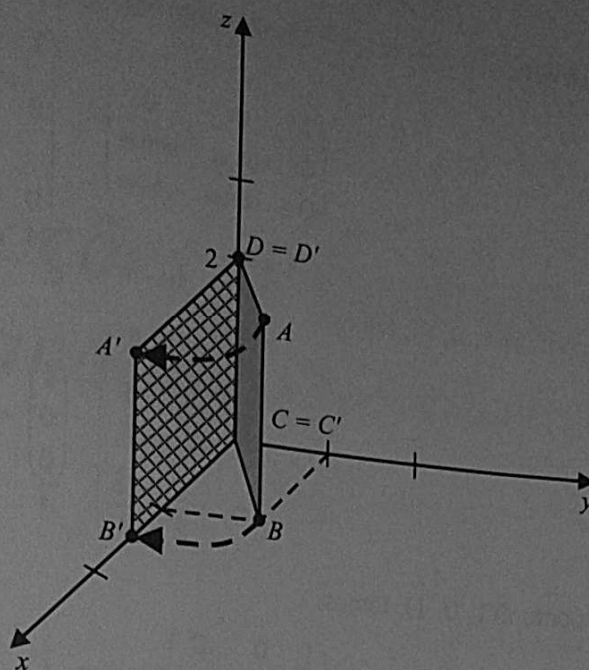


Figura A1.36

4. Gire a figura $ABCD$, 30° em torno do eixo x (sentido horário).

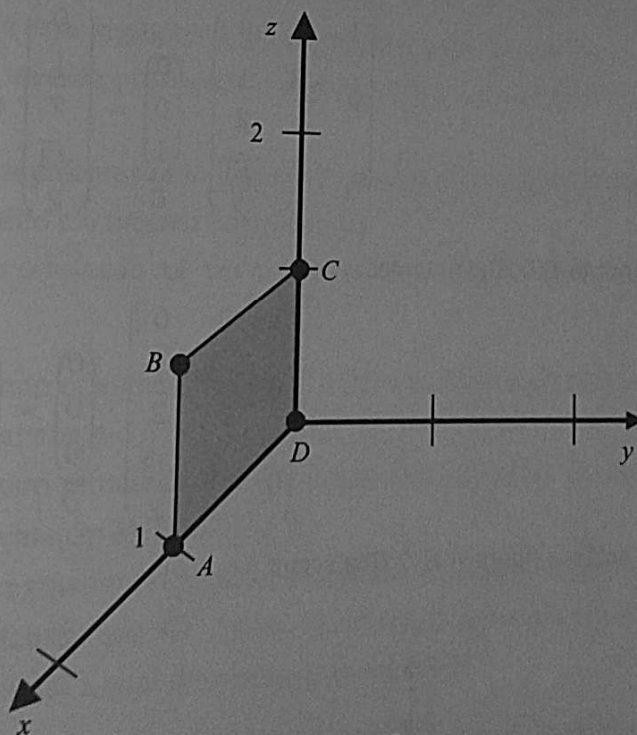


Figura A1.37

Para fazer uma rotação de ângulo α em torno do eixo x (sentido horário) na figura, devemos utilizar a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Para o ponto $A(1, 0, 0)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{A}'}$$

Para o ponto $B(1, 0, 1)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,86 \end{pmatrix}}_{\vec{B}'}$$

Para o ponto $C(0, 0, 1)$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cong \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,86 \end{pmatrix}}_{\vec{C}'}$$

Para o ponto $D(0, 0, 0)$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{D}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{D}'}$$

Temos então a figura $A'B'C'D'$ a seguir.



Figura A1.38

Noções de geometria analítica no plano

A2.1 Vetores

A2.1.1 Segmentos eqüipolentes

Consideremos inicialmente dois pontos *distintos* de um plano, A e B .

Informalmente falando, o *segmento orientado com origem em A e fim em B* é o segmento de reta AB cuja direção é a da reta determinada pelos pontos A e B (reta r) e cujo *sentido de orientação* é de A para B (note que, numa dada direção, temos dois sentidos possíveis de percurso). Também associamos a esse segmento a noção de *comprimento*, obtida comparando sua extensão com uma unidade de medida previamente estabelecida. O comprimento é expresso por um *número real positivo*.

Dizemos que dois segmentos orientados de um plano são *eqüipolentes* se eles têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Dado um segmento orientado AB em um plano, podemos associar a ele três conceitos, a saber:

- a) A *direção* do segmento orientado AB , que é a mesma direção de todas as retas paralelas à reta determinada pelos pontos A e B ;
- b) O *sentido* do segmento orientado AB , que é o mesmo de todos os segmentos orientados que têm o sentido de orientação igual ao de AB ;
- c) O *comprimento* do segmento orientado AB , que é o mesmo de todos os segmentos orientados que têm a mesma extensão que AB . Agora, se combinamos esses conceitos entre si, chegamos a uma unidade conceitual a qual denominamos *vetor AB* .

Se fixamos um dos planos ao qual os pontos A e B pertencem, podemos formar uma representação do *vetor AB* com o auxílio da Teoria dos Conjuntos, dizendo: *vetor AB* é o conjunto dos segmentos orientados contidos no plano fixado, os quais têm a mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento que o segmento orientado AB . Cada segmento orientado pertencente ao conjunto é denominado um *representante* do *vetor AB* . O comprimento de um representante do *vetor AB* é denominado *norma* (ou *módulo*) do *vetor AB* .

Dizemos que dois vetores são *iguais* se podem ser representados por um mesmo segmento orientado ou se têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma norma.

Se os pontos A e B coincidem, denominamos o segmento orientado AB **segmento nulo**. O segmento nulo não tem direção e, por definição, tem comprimento 0. O conjunto dos segmentos orientados nulos é denominado **vetor nulo**, e tem norma 0. Também dizemos que um ponto representa o vetor nulo.

O **oposto** de um vetor não-nulo é o vetor que tem a direção e a norma iguais ao dele, mas *sentido contrário*.

Notações: Por comodidade, denotaremos os vetores em **negrito**, usando letras latinas maiúsculas para indicar os extremos dos representantes, ou letras latinas minúsculas diretamente. Exemplos: vetores AB , CD , DE , ..., ou vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, ..., $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ...

Para *igualdade* de vetores, usamos o mesmo símbolo de igualdade já conhecido ($=$).

Para *norma* de vetor, usamos a dupla barra: $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, ...

O **vetor nulo** é denotado por $\mathbf{0}$. Então, $\|\mathbf{0}\| = 0$.

Reciprocamente, se $\|\mathbf{u}\| = 0$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

O **oposto** de um vetor $\mathbf{u}$ é denotado por $-\mathbf{u}$.

O conjunto dos vetores definidos a partir de segmentos orientados de um plano é denominado **espaço vetorial** $\mathbb{R}^2$.

A2.1.2 Operações com vetores

Definiremos rapidamente as duas primeiras operações com vetores: a *adição (soma)* de vetores, e a *multiplicação de um número real* por um vetor.

(i) Adição (soma) de vetores

Definiremos essa operação “geometricamente”, com o auxílio de representantes de vetores. Para evitar mal-entendidos, lembramos que segmentos orientados com a mesma direção, sentido e comprimento representam *o mesmo vetor*. Veja a Figura A2.1.

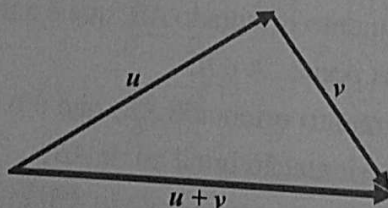


Figura A2.1

Da definição, segue a *Regra do Paralelogramo*.

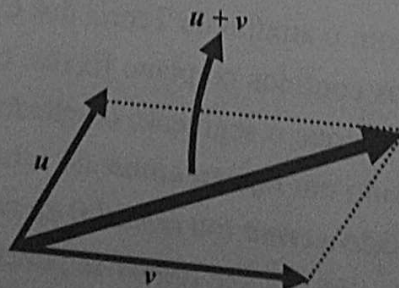


Figura A2.2

Essa operação possui propriedades análogas às da soma numérica (comutativa, associativa, elemento neutro (vetor nulo), existência do oposto (o oposto do vetor $\mathbf{u}$ é o vetor $-\mathbf{u}$ (ver definição anteriormente))).

A partir da soma, definimos a *diferença* entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotada por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Ver Figura A2.3.

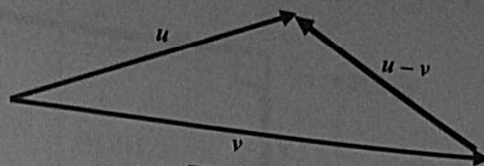


Figura A2.3

(ii) Multiplicação de um número real por um vetor

Dados um número real α e um vetor $\mathbf{u}$, definimos o vetor $\alpha\mathbf{u}$ como:

- (1) O vetor nulo ($\mathbf{0}$), se $\alpha = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- (2) Se $\alpha \neq 0$ e $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\alpha\mathbf{u}$ é o vetor que tem a *mesma direção* de $\mathbf{u}$ (dizemos que $\alpha\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}$ são vetores *paralelos*); mesmo sentido de $\mathbf{u}$, se $\alpha > 0$ (positivo) e sentido contrário de $\mathbf{u}$, se $\alpha < 0$, negativo; norma igual a $|\alpha|$ multiplicado pela norma de $\mathbf{u}$ ($\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\|$).

Essa operação tem, em relação à soma de vetores, propriedades análogas às do produto de números em relação à soma de números.

A Figura A2.4 exemplifica geometricamente essa operação.

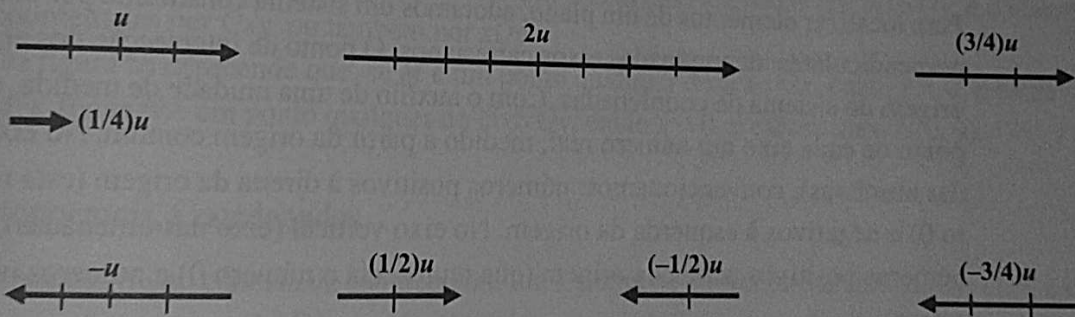


Figura A2.4

A2.1.3 Vetores paralelos

Dizemos que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *paralelos* se eles têm a *mesma direção*.

Isso significa que eles têm representantes ou numa mesma reta ou em retas paralelas (ver Figura A2.4).

Notação: $\mathbf{u} // \mathbf{v}$

Observação importante: Como consequência da operação definida em (2) (ii), segue o resultado que utilizaremos futuramente.

Resultado:

Se dois vetores *não-nulos* $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *paralelos*, então existe um *único* número real α tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ (também podemos dizer: existe um *único* número real β tal que $\mathbf{v} = \beta\mathbf{u}$ ($\beta = 1/\alpha$)).

A2.1.4 Vetores ortogonais

Dizemos que dois vetores u e v são *ortogonais* se eles têm representantes *perpendiculares* (Figura A2.5)

Notação: $u \perp v$

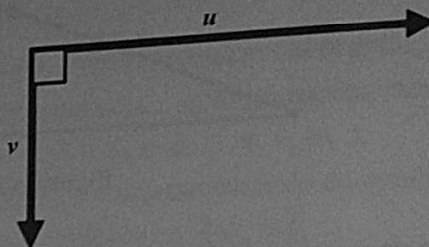


Figura A2.5

Observação sobre a notação: As notações para *não-ortogonais* (negação de “ortogonais”) e para *não-paralelos* (negação de “paralelos”) são, respectivamente:

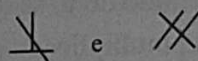


Figura A2.6

A2.1.5 Plano cartesiano

Para localizar elementos de um plano, adotamos um sistema constituído por duas retas orientadas perpendiculares, denominadas eixos cartesianos. O ponto de intersecção dos eixos é denominado origem do sistema de coordenadas. Com o auxílio de uma unidade de medida, associamos a cada ponto de cada eixo um número real, medido a partir da origem comum. No eixo horizontal (eixo das abscissas), convencionamos: números positivos à direita da origem (esta representa o número 0) e negativos à esquerda da origem. No eixo vertical (eixo das ordenadas), convencionamos: números positivos acima da origem (que representa o número 0) e números negativos abaixo da origem.

Um plano munido com esse sistema é denominado *plano cartesiano* (homenagem ao filósofo e matemático francês Renée Descartes (em latim: Renatus Cartesius), criador da geometria analítica).

Para determinar a posição de um ponto P do plano cartesiano em relação a esse sistema de coordenadas, traçamos pelo ponto duas retas, respectivamente paralelas aos eixos coordenados. A reta vertical intercepta o eixo horizontal em um único ponto; a distância (com sinal) desse ponto à origem é denominada a *abscissa* do ponto P . A reta horizontal intercepta o eixo vertical em um único ponto; a distância (com sinal) desse ponto à origem é denominada *ordenada* do ponto P . Estes dois números são denominados as *coordenadas cartesianas* do ponto P em relação ao sistema de coordenadas cartesianas fixado. Usualmente escrevemos $P(x, y)$, em que (x, y) é denominado um *par ordenado* de números reais. Por convenção, x representa a abscissa do ponto P e y representa a ordenada do ponto P .

Desse modo associamos a cada ponto do plano um *único* par ordenado de números reais (x, y) . Reciprocamente, por meio de uma construção simples (deixamos a cargo do leitor), podemos associar a cada par ordenado de números reais (x, y) um *único* ponto P do plano cartesiano, o qual terá

x e y como coordenadas cartesianas em relação a um sistema de coordenadas cartesianas fixado. Dizemos então que existe uma *correspondência biunívoca (um-a-um)* entre pontos do plano cartesiano e pares ordenados de números reais. A Figura A2.7 ilustra alguns elementos apresentados.

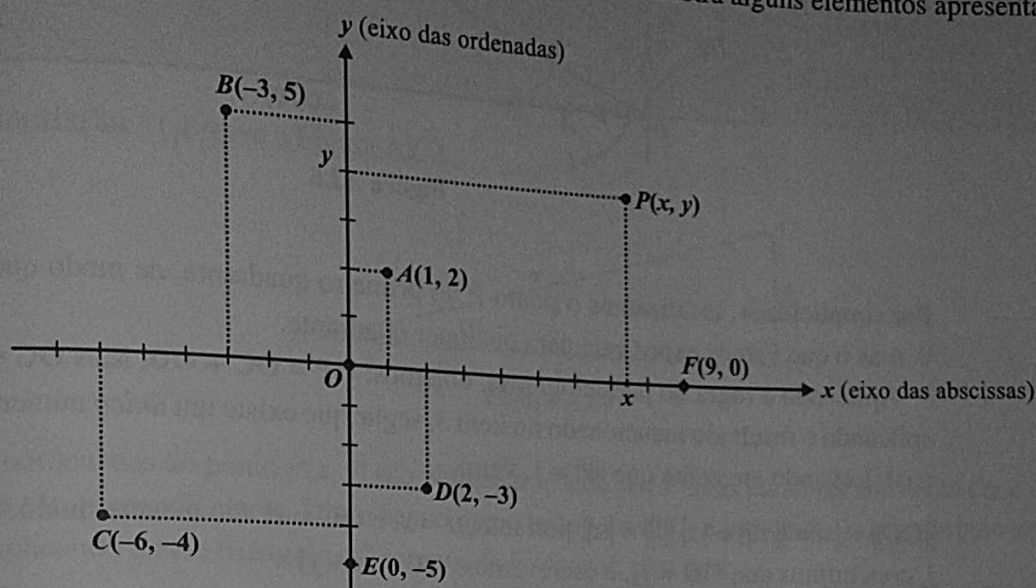


Figura A2.7

Observações:

1. $O(0, 0)$.
2. Denotamos o eixo das abscissas por *eixo Ox*, o eixo das ordenadas por *eixo Oy*, e o sistema de coordenadas por *Oxy*, ou também por *xOy*.
3. Da figura se depreende que, se M é um ponto qualquer do eixo *Ox*, então $y = 0$, e escrevemos $M(x, 0)$; se N é um ponto qualquer do eixo *Oy*, então $x = 0$, e escrevemos $N(0, y)$.

A2.1.6 Bases ortonormais. Coordenadas

Fixemos um plano cartesiano, munido com um sistema de coordenadas cartesianas *Oxy*, e consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, constituído pelos vetores definidos a partir de segmentos orientados contidos nesse plano.

Dado um vetor $\mathbf{u}$ pertencente a $\mathbb{R}^2$, existe um *único* representante de $\mathbf{u}$ cujo início coincide com a *origem* do sistema de coordenadas cartesianas *Oxy*, e cujo fim (a “ponta”) coincide com um *único* ponto P pertencente ao plano cartesiano. O vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ é denominado *vetor posição* do ponto P em relação ao sistema de coordenadas cartesianas *Oxy*.

Em particular, se $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$, denotemos o vetor posição de A por $\mathbf{i}$: $\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}$, e o vetor posição de B , por $\mathbf{j}$: $\mathbf{j} = \overrightarrow{OB}$. Verifica-se facilmente que $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = 1$. Todo vetor com norma 1 é denominado *vetor unitário* ou *versor* (dizemos também que ele está *normalizado*). Esses dois versores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ também são *ortogonais* ($\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$), e denominamo-los, respectivamente, *versor do eixo Ox* e *versor do eixo Oy*. Eles desempenham um papel muito importante no nosso estudo, como veremos a seguir.

De fato, consideremos um vetor $\mathbf{u}$ pertencente a $\mathbb{R}^2$, e seja $\overrightarrow{OP}$ o vetor posição associado a $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$). Escrevemos $P(x, y)$ para indicar as coordenadas do ponto P em relação a *Oxy*. A Figura A2-8 ajudará na compreensão do raciocínio que exporemos a seguir.

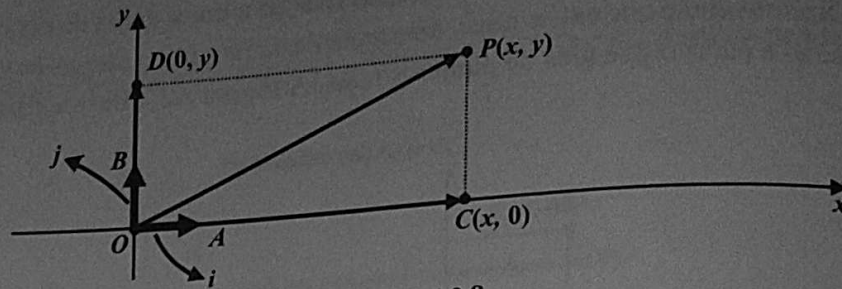


Figura A2.8

Por simplicidade, localizamos o ponto P no primeiro quadrante, de modo que temos $x > 0$ e $y > 0$, mas o que vamos expor vale para qualquer quadrante.

Aplicando a regra do paralelogramo, obtemos: $\mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{OD}$. Mas $\mathbf{OC}$ é paralelo a $\mathbf{i}$, logo, aplicando o resultado mencionado no item 3, segue que existe um *único* número real α tal que $\mathbf{OC} = \alpha \mathbf{i}$. Levando em conta que $\|\mathbf{i}\| = 1$, vem:

$\|\mathbf{OC}\| = |x| = \|\alpha \mathbf{i}\| = |\alpha| \|\mathbf{i}\| = |\alpha|$, portanto, $\alpha = x$, e $\mathbf{OC} = x\mathbf{i}$. Do mesmo modo, relacionando $\mathbf{OD}$ e $\mathbf{j}$, concluímos que $\mathbf{OD} = y\mathbf{j}$, e escrevemos: $\mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Resumindo: se $\mathbf{u}$ é um vetor pertencente a $\mathbb{R}^2$, então existem *únicos números reais* x e y tal que $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ou seja, podemos expressar qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ em termos dos vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Em virtude dessa propriedade, o conjunto $C = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ é denominado **Base Ortonormal*** (ou **Base Canônica**) do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Se $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é um vetor de $\mathbb{R}^2$, denominamos os números x e y as *coordenadas* do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base $C = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Notação simplificada: A notação simplificada para “ $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ” é “ $\mathbf{u} = (x, y)$ ”.

Na notação simplificada, escrevemos: $\mathbf{i} = (1, 0)$ e $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Para evitar mal-entendidos com as notações de pontos do plano Oxy e de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, lembramos que denotamos pontos por letras latinas maiúsculas e sem o símbolo de igualdade: $P(x, y)$.

Observação 1: Doravante, fica subentendido que todos os vetores pertencentes ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ terão suas coordenadas referidas à **Base Canônica** $C = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, e não mencionaremos mais isso.

Observação 2: Fica bem simples verificar a igualdade de vetores em termos de coordenadas. De fato, consideremos os vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, obviamente $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Reciprocamente, se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ou seja, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, concluímos, pela *unicidade das coordenadas*, que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Resumindo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2$$

*“Orto”: os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são *ortogonais*; “normal”: os vetores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são *normalizados* (têm norma igual a 1 (versores)).

A2.1.7 Norma de um vetor em termos de coordenadas

Proposição 1

Seja $\mathbf{u} = (x, y)$ um vetor. Então:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Demonstração: Observe a Figura A2.9.

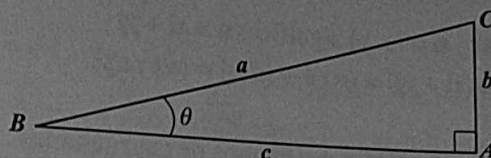


Figura A2.9

As coordenadas do ponto $P(x, y)$ são obtidas traçando por P retas paralelas aos eixos Ox e Oy , os quais são perpendiculares. Disso segue que o triângulo OCP é retângulo, com o ângulo reto em C . Aplicando a esse triângulo o *Teorema de Pitágoras*, obtemos:

$(\overline{OP})^2 = (\overline{OC})^2 + (\overline{CP})^2$ ($\overline{OP}$, $\overline{OC}$, $\overline{CP}$ representam, respectivamente, os comprimentos dos segmentos OP , OC e CP)

Mas:

$$\overline{OP} = \|\mathbf{OP}\| = \|\mathbf{u}\|, \overline{OC} = |x|, \overline{CP} = \overline{OD} = |y|$$

($OCPD$ é um retângulo) substituindo na igualdade anterior, obtemos: $\|\mathbf{u}\|^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$.

Extraindo a raiz quadrada positiva dos dois membros dessa igualdade, segue a fórmula:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

EXEMPLO

Aplicando a fórmula anterior, calcule a norma de cada vetor dado:

a. $\mathbf{u} = (3, 4)$ b. $\mathbf{v} = (-6, -8)$ c. $\mathbf{w} = (2, -1)$

Solução

a. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

b. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

c. $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

■

A2.1.8 Operações com vetores e paralelismo de vetores em termos de coordenadas

a. Adição de vetores

Proposição 2

Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores.

Então: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Demonstração: $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ significa: $\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ significa: $\mathbf{v} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$
 Então: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + y_2\mathbf{j} = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

b. Multiplicação de um número real por um vetor

Proposição 3: Sendo α um número real, e $\mathbf{u} = (x, y)$ um vetor, então: $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y)$.

Demonstração: $\mathbf{u} = (x, y)$ significa: $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 Então: $\alpha\mathbf{u} = \alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (\alpha x)\mathbf{i} + (\alpha y)\mathbf{j} = (\alpha x, \alpha y)$.

c. Paralelismo de vetores em termos de coordenadas

O resultado da Seção A2.1.3, juntamente com a **Proposição anterior**, nos fornece um critério para determinar se dois vetores são paralelos ou não, em termos de suas coordenadas.

De fato, sejam dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, não-nulos. Pelo resultado da Seção A2.1.3 temos:

$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow$ Existe um único número real α tal que, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$
(Proposição anterior) $\Leftrightarrow (x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2) \Leftrightarrow x_1 = \alpha x_2$ e $y_1 = \alpha y_2$.

Resumindo:

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2$$

Dizemos então que as coordenadas correspondentes são *proporcionais*.

Se, em particular, por exemplo, $x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, podemos dividir as equações anteriores respectivamente por x_2 e por y_2 , obtendo:

$$\frac{x_1}{x_2} = \alpha \text{ e } \frac{y_1}{y_2} = \alpha, \text{ e escrevemos:}$$

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

EXEMPLOS

1. Considerando os vetores $\mathbf{u} = (-1, 1)$; $\mathbf{v} = (-2, 3)$; $\mathbf{w} = (4, 1)$, então:

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 1) + (-2, 3) = (-1 + (-2), 1 + 3) = (-3, 4)$

b. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, 1) - (-2, 3) = (-1 - (-2), 1 - 3) = (1, -2)$

c. $\mathbf{u} + \mathbf{w} = (-1, 1) + (4, 1) = (-1 + 4, 1 + 1) = (3, 2)$

d. $\mathbf{u} - \mathbf{w} = (-1, 1) - (4, 1) = (-1 - 4, 1 - 1) = (-5, 0)$

e. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(-1, 1) + 3(-2, 3) = (2 \cdot (-1), 2 \cdot 1) + (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3) = (-2, 2) + (-6, 9) = (-2 - 6, 2 + 9) = (-8, 11)$

f. $3\mathbf{u} - 2\mathbf{w} = 3(-1, 1) - 2(4, 1) = (3 \cdot (-1), 3 \cdot 1) - (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (-3, 3) - (8, 2) = (-3 - 8, 3 - 2) = (-11, 1)$

g. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (-1, 1) + (-2, 3) + (4, 1) = (-1 - 2 + 4, 1 + 3 + 1) = (1, 5)$

$$\begin{aligned} \text{h. } \mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= (-1, 1) - 3(-2, 3) + 2(4, 1) = (-1, 1) - (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3) + (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = \\ &= (-1, 1) - (-6, 9) + (8, 2) = (-1 - (-6) + 8, 1 - 9 + 2) = (13, -6) \\ \text{i. } 5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} &= 5(-1, 1) + 2(-2, 3) - 3(4, 1) = \\ &= (5 \cdot (-1), 5 \cdot 1) + (2 \cdot (-2), 2 \cdot 3) - (3 \cdot 4, 3 \cdot 1) = \\ &= (-5, 5) + (-4, 6) - (12, 3) = (-5 - 4 - 12, 5 + 6 - 3) = (-21, 8) \end{aligned}$$

2. Considerando os vetores do exemplo, então:

$$\begin{aligned} \text{a. } \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \text{b. } \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \text{c. } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \text{d. } \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \text{e. } \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Na Seção A2.1.9, adiante, faremos uma revisão rápida de alguns conceitos básicos de Trigonometria, os quais serão necessários na sequência do nosso estudo.

A2.1.9 Uma revisão rápida de trigonometria

a. No triângulo retângulo

Consideremos o triângulo retângulo ABC , com ângulo reto A . Sejam:

a , o comprimento da hipotenusa, oposta ao ângulo A ;

b , o comprimento do cateto oposto ao ângulo B ;

c , o comprimento do cateto oposto ao ângulo C .

Ver Figura A2.9.

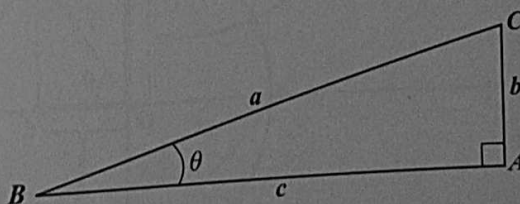


Figura A2.9

Denominando θ^* o ângulo interno com vértice em B , temos as definições:

- (i) Seno do ângulo θ (denota-se: $\text{sen } \theta$): $\text{sen } \theta = b/a$
- (ii) Cosseno do ângulo θ (denota-se: $\text{cos } \theta$): $\text{cos } \theta = c/a$

*Como é usual, identificamos o nome do ângulo com a sua medida.

Observações:

1. Se quadramos e somamos membro a membro as duas igualdades anteriores, e usamos o Teorema de Pitágoras, obtemos a *Identidade Fundamental da Trigonometria* (IFT): $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$. (Verifique!)
2. Da definição (ii), obtemos uma igualdade que terá uma grande importância no nosso estudo:

$$c = a \cdot \cos \theta$$

b. No círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico nos possibilita generalizar as definições anteriores (seno e cosseno) para quaisquer valores reais do ângulo θ .

Nessa abordagem, a unidade de medida do ângulo θ é o *radiano* (rad), definido como a medida do ângulo central de um círculo de raio r , ângulo este que determina no círculo um arco de comprimento igual ao raio. Portanto, se θ é um ângulo central em um círculo de raio r , e o arco determinado por θ tem comprimento s , então a medida de θ , em radianos, é: $\theta = s/r$. A relação entre grau ($^\circ$) e radiano (rad) será abordada mais adiante.

O círculo trigonométrico tem centro na origem do sistema de coordenadas Oxy , e, por definição, o seu raio é a unidade de medida ($r = 1$). Desse modo, a medida de um ângulo central, em radianos, coincide com o comprimento do arco que o ângulo determina no círculo ($\theta = s/r$, se fazemos $r = 1$, $\theta = s$). Por convenção, medimos ângulos (ou arcos) a partir do ponto onde o círculo trigonométrico intercepta o semi-eixo positivo Ox , e ângulos positivos correspondem ao sentido anti-horário de percurso do círculo, ao passo que ângulos negativos correspondem ao sentido horário de percurso.

A Figura A2.10 ilustra o que foi dito, e ajudará na compreensão das exposições seguintes.

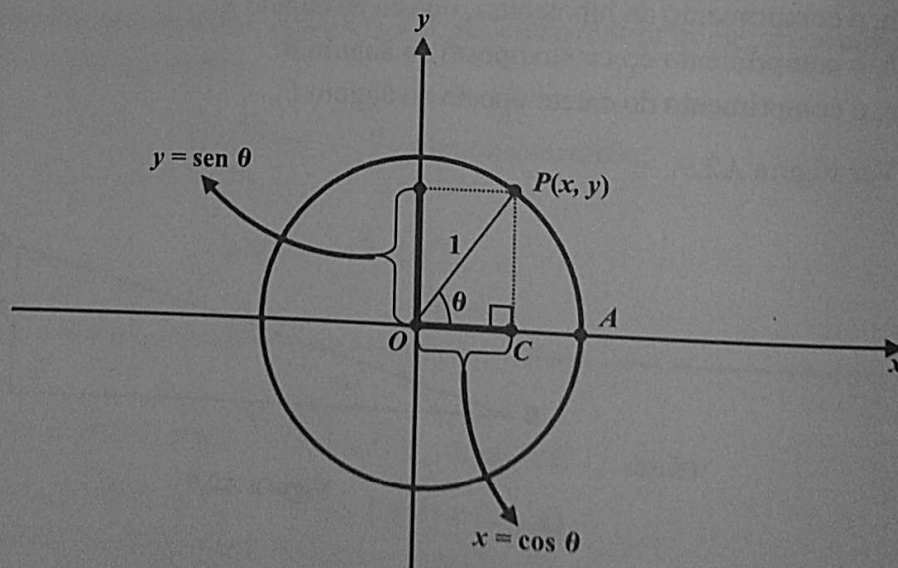


Figura A2.10

Por definição, a abscissa do ponto P é o cosseno do ângulo θ , e a ordenada do ponto P é o seno do ângulo θ :

$$x = \cos \theta \text{ e } y = \sin \theta$$

Observações:

1. Sendo OCP um triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento igual a 1, as definições de cosseno e seno coincidem com aquelas dadas para o triângulo retângulo na Seção A2.9a.
2. Aplicando ao triângulo OCP o Teorema de Pitágoras, obtemos a Identidade Fundamental da Trigonometria de modo imediato.
3. Duas relações futuramente úteis, facilmente dedutíveis, $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin \theta$.
4. A relação entre grau ($^\circ$) e radiano (rad) é facilmente estabelecida a partir do círculo trigonométrico: uma volta completa corresponde a 360° , mas também corresponde ao arco de medida 2π rad (o comprimento do círculo é $C = 2\pi r$, e $r = 1$). Portanto, temos a relação: $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ rad e, por subdivisões, seguem: $180^\circ \leftrightarrow \pi$ rad, $0^\circ \leftrightarrow \pi/2$ rad, $45^\circ \leftrightarrow \pi/4$ rad, $60^\circ \leftrightarrow \pi/3$ rad, $30^\circ \leftrightarrow \pi/6$ rad etc.
5. A tabela da Figura A2.11 fornece os valores do seno e do cosseno para alguns ângulos (arcos) notáveis. Ela será útil mais tarde na resolução de exemplos e exercícios.

θ	0° (0 rad)	30° ($\frac{\pi}{6}$ rad)	45° ($\frac{\pi}{4}$ rad)	60° ($\frac{\pi}{3}$ rad)	90° ($\frac{\pi}{2}$ rad)	180° (π rad)
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Figura A2.11

A2.1.10 Ângulo entre dois vetores não-nulos

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores não-nulos pertencentes a $\mathbb{R}^2$.

Definição

Ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é, por definição, o menor ângulo formado por dois representantes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, traçados com a mesma origem.

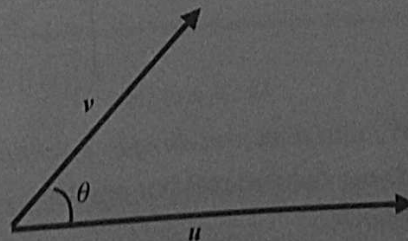


Figura A2.12

Notação: $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Da definição, segue que: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, ou $0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$.

Observação: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$ ($\pi/2$ rad).

A2.1.11 Produto escalar

A2.1.11.1 Preliminar geométrico

Na geometria plana, o conceito de *Projeção Ortogonal* de um segmento de reta sobre uma reta (ou, também, sobre um outro segmento de reta) é muito importante, e tem várias aplicações.

Dado um segmento com extremos A e B e uma reta r , baixamos por A e por B retas perpendiculares à reta r . Denotando respectivamente por A' e B' os pés das perpendiculares baixadas por A e B , então o segmento $A'B'$ é denominado *Projeção Ortogonal do segmento AB sobre a reta r* . Ilustramos isso na Figura A2.13.

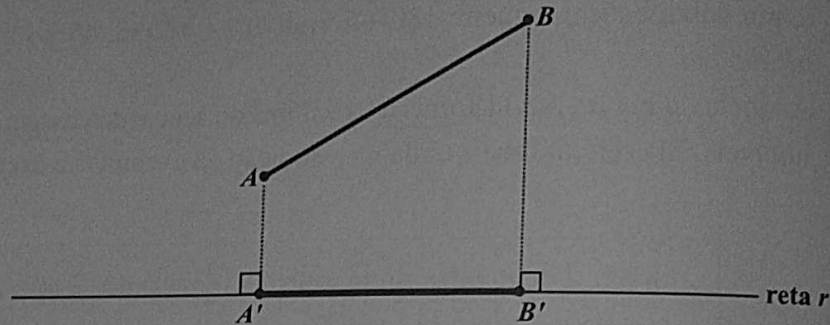


Figura A2.13

A2.1.11.2 Produto escalar

Nesta seção, vamos definir uma terceira operação com vetores do $\mathbb{R}^2$ e mostrar que essa operação, de certo modo, se coaduna com Projeções Ortogonais de segmentos orientados sobre outros segmentos orientados, sendo que esses segmentos orientados representarão vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Para isso, vamos iniciar com uma

a. Definição preliminar

Dado um vetor w pertencente a $\mathbb{R}^2$, $w \neq 0$, definimos o *versor* de w , como:

$$W = \left(\frac{1}{\|w\|} \right) w.$$

Notemos que, sendo

$$\left(\frac{1}{\|w\|} \right) > 0,$$

o versor de w (W) tem a mesma direção e sentido de w (ver a segunda operação com vetores – multiplicação de um número real por um vetor – Seção A2.1.2(ii)); e o nome *versor* indica que W é um *vetor unitário*.

De fato:

$$\|w\| = \left\| \left(\frac{1}{\|w\|} \right) w \right\| = \left| \frac{1}{\|w\|} \right| \|w\| = \frac{\|w\|}{\|w\|} = 1$$

Com essa preparação, vamos agora definir o *Produto Escalar* de dois vetores u e v pertencentes a $\mathbb{R}^2$. Primeiramente definiremos essa operação para u e v não-nulos, depois a estenderemos para o caso de um dos vetores ser nulo.

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores *não-nulos* pertencentes a $\mathbb{R}^2$, e denotemos por θ o ângulo entre eles:
 $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (ou, $0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$)

b. Definição de produto escalar*

O *Produto Escalar* dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, é o *número real* definido por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$$

c. Produto escalar *versus* projeção ortogonal

(i) Vamos aplicar a definição anterior para calcular o produto escalar de $\mathbf{u}$ pelo versor de $\mathbf{v}$,

$$\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v}:$$

$$\mathbf{u} \cdot \left[\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v} \right] = \|\mathbf{u}\| \cdot \left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v} \right\| \cdot \cos \theta = \|\mathbf{u}\| \cdot \left| \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \right| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta =$$

$$\|\mathbf{u}\| \cdot \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \cos \theta = \|\mathbf{u}\| \cdot \cos \theta = \text{projeção ortogonal do representante de } \mathbf{u} \text{ sobre o representante de } \mathbf{v}.$$

Ver Figura A2.14.

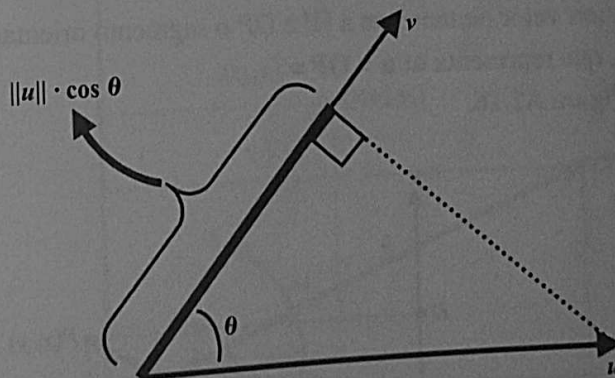


Figura A2.14

(ii) Vamos aplicar a definição anterior para calcular o produto escalar de $\mathbf{v}$

pelo vetor $\mathbf{u}$, $\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} \cdot \left[\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \mathbf{u} \right] = \|\mathbf{v}\| \cdot \left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \mathbf{u} \right\| \cdot \cos \theta = \left| \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \right) \right| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta =$$

*Usualmente, a definição de Produto Escalar é dada em termos das coordenadas dos vetores. Iremos mostrar mais à frente que as duas definições são equivalentes. Escolhemos essa porque nos parece mais "visualizável", como veremos no item c.

$\left(\frac{\|u\|}{\|u\|} \right) \cdot \|v\| \cdot \cos \theta = \|v\| \cdot \cos \theta = \text{projecção ortogonal do representante de } v \text{ sobre o representante de } u.$

Ver Figura A2.15.

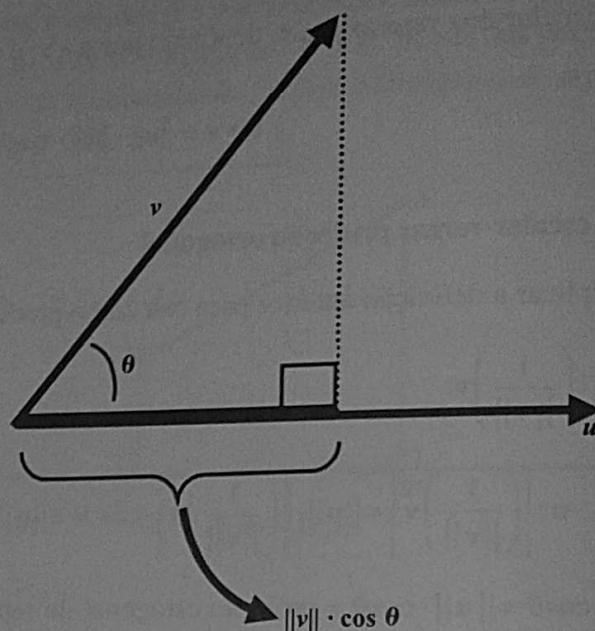


Figura A2.15

A2.1.11.3 Projeção ortogonal de um vetor sobre os versores i e j

Sejam u um vetor pertencente a $\mathbb{R}^2$ e OP o segmento orientado com origem no sistema de coordenadas, que representa u : $u = OP = (x, y)$.

Ver Figura A2.16.

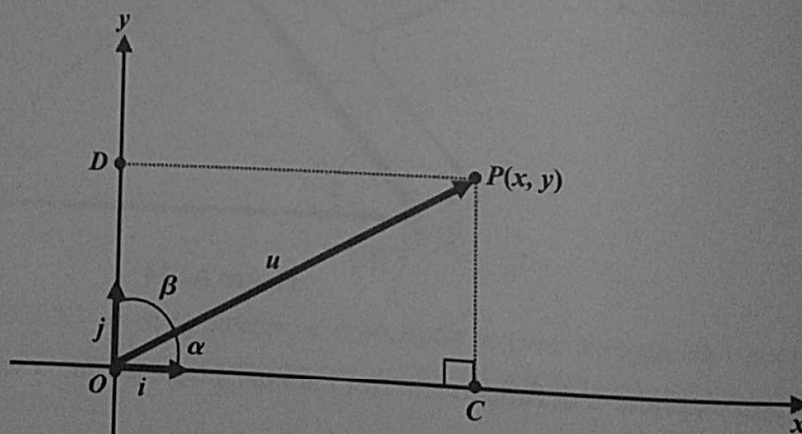


Figura A2.16

De acordo com o item 2, temos:

$$u \cdot i = \|u\| \cdot \cos \alpha = x$$

$$u \cdot j = \|u\| \cdot \cos \beta = y$$

E podemos escrever: $u = (u \cdot i)i + (u \cdot j)j$

Isso significa que, se conhecemos $\|\mathbf{u}\|$ e o ângulo α ($\beta = 90^\circ - \alpha$), podemos calcular as coordenadas de $\mathbf{u}$.

A2.1.11.4 O produto escalar em termos de coordenadas

Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores não-nulos do $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Em palavras: O Produto Escalar de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é a soma dos produtos das correspondentes coordenadas.

Demonstração: (Ver Figura A2.17.)

Designações:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}, \mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}, \theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \delta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{i}), \omega = \text{âng}(\mathbf{v}, \mathbf{i})$$

Por simplicidade, representamos todos os elementos no primeiro quadrante.

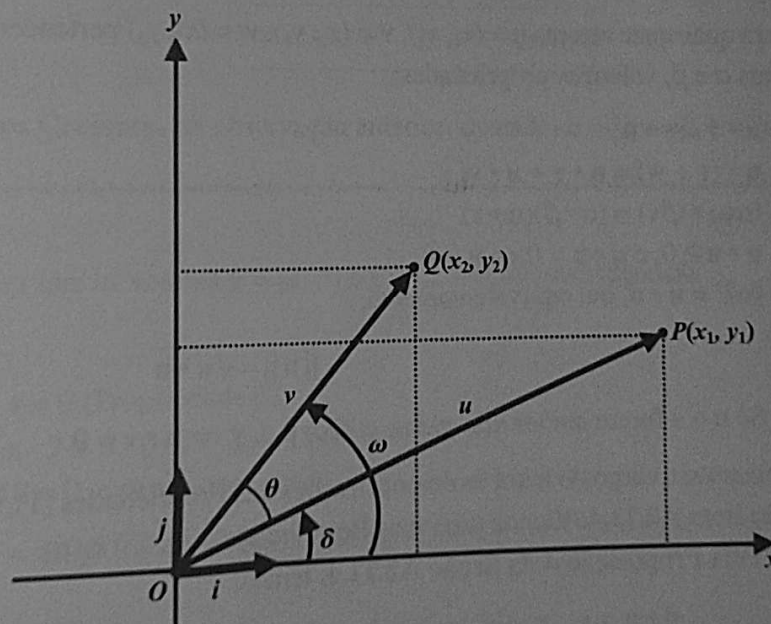


Figura A2.17

$$\theta = \omega - \delta$$

Da definição de produto escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$

Substituindo θ , segue: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\omega - \delta)$ (i)

De uma identidade da trigonometria:

$$\cos(\omega - \delta) = \cos \omega \cdot \cos(-\delta) - \sin \omega \cdot \sin(-\delta)$$

Mas: $\cos(-\delta) = \cos \delta$, e $\sin(-\delta) = -\sin \delta$ (Ver Observação 3)

Portanto: $\cos(\omega - \delta) = \cos \omega \cdot \cos \delta + \sin \omega \cdot \sin \delta$

Levando em (i): $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot (\cos \omega \cdot \cos \delta + \sin \omega \cdot \sin \delta)$

Distribuindo convenientemente as normas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, obtemos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\|\mathbf{u}\| \cdot \cos \delta)(\|\mathbf{v}\| \cdot \cos \omega) + (\|\mathbf{u}\| \cdot \sin \delta) \cdot (\|\mathbf{v}\| \cdot \sin \omega)$$

Mas: $x_1 = \|\mathbf{u}\| \cdot \cos \delta$; $x_2 = \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \omega$; $y_1 = \|\mathbf{u}\| \cdot \sin \delta$; $y_2 = \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \omega$ (conforme Seção A2.9).

Logo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Observações:

1. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então, por definição, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Isto é coerente com a fórmula para o produto escalar obtida anteriormente.
2. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, não podemos concluir que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. De fato, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem *ambos não-nulos* mas forem ortogonais, então $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 90^\circ$, e temos: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos 90^\circ = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot 0 = 0$.
3. Da **Observação 1**, segue que a fórmula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ pode ser aplicada para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, quer sejam ambos não-nulos, quer um deles seja nulo.

A2.1.11.5 Propriedades do produto escalar

Para quaisquer vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{w} = (x_3, y_3)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$, e quaisquer números reais α e β , valem as propriedades:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\beta \mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, ou, equivalentemente,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

6. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem *ambos não-nulos*, então: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Deixamos a cargo do leitor as demonstrações das Propriedades (1), (2) e (3), usando a **Proposição 4 do item A2.11.4**. Vamos provar as Propriedades (4), (5) e (6).

(4) Pela **Proposição 4 da Seção A2.11.4**, temos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 \geq 0 \text{ (soma de quadrados de números reais).}$$

Agora: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 0 \text{ e } y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = (0, 0) = \mathbf{0}$

(5) Pela **Proposição 7.1**, temos que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Quadrando, vem:

$\|\mathbf{u}\|^2 = x_1^2 + y_1^2$. Na demonstração da Propriedade (4), concluímos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = x_1^2 + y_1^2$. Logo, $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

(6) Sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ambos não-nulos, então $\|\mathbf{u}\| > 0$ e $\|\mathbf{v}\| > 0$.

Usando a nossa definição de Produto Escalar, segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \perp \mathbf{v} &\Rightarrow \theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos 90^\circ = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 &\Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta = 0 \Rightarrow \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Observação: Se partimos da **Proposição 11.4** como definição do Produto Escalar, podemos, usando as Propriedades de (1) a (5) e a Lei dos Cossenos para um triângulo qualquer, demonstrar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$ ($\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-nulos). Deixamos a cargo do leitor. (Sugestão: Aplicar a lei dos Cossenos ao triângulo da Figura A2.18, com $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, em seguida desenvolver $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$ usando as Propriedades de 1) a 5).)

Complementando a observação anterior, fornecemos a seguir a lei dos Cossenos para um triângulo qualquer.

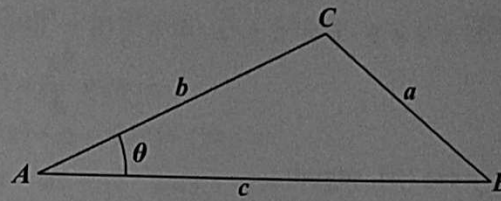


Figura A2.18

Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta$$

(Aplicar a lei dos Cossenos, na observação anterior, fazendo: $a = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, $b = \|\mathbf{u}\|$, $c = \|\mathbf{v}\|$.)

EXEMPLOS

1. Calcule a para que os vetores $\mathbf{u} = (a, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, -6)$ sejam ortogonais.

Solução

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ (Propriedade 6)}$$

$$\text{Mas: } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a \cdot 2 + 3 \cdot (-6) = 2a - 18 \text{ (Proposição)}$$

$$\text{Então: } 2a - 18 = 0, \text{ e segue que: } a = 9.$$

2. Determine $\mathbf{u} = (x, y)$, sabendo que $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} = (1, -3)$ e $\mathbf{u} \cdot (1, 1) = 20$.

Solução

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x \cdot 1 + y \cdot (-3) = x - 3y = 0 \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{u} \cdot (1, 1) = 20 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot 1 = 20 \Leftrightarrow x + y = 20 \quad (\text{ii})$$

Resolvendo o sistema linear constituído pelas equações (i) e (ii), obtemos: $x = 15$ e $y = 5$.

Portanto, $\mathbf{u} = (15, 5)$.

3. Determine $\mathbf{u} = (x, y)$, sendo $\mathbf{u} \cdot (2, -1) = -1$ e $\mathbf{u} \cdot (1, 3) = 10$.

Solução

$$\mathbf{u} \cdot (2, -1) = -1 \Leftrightarrow x \cdot 2 + y \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow 2x - y = -1 \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{u} \cdot (1, 3) = 10 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x + 3y = 10 \quad (\text{ii})$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $x = 1$ e $y = 3$. Logo: $\mathbf{u} = (1, 3)$.

4. Determine $\mathbf{u} = (x, y)$, sabendo que $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} = (3, -4)$ e $\|\mathbf{u}\| = 5$.

Solução

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x \cdot 3 + y \cdot (-4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0 \quad (i)$$

Pela Proposição 1 da Seção A2.1.7, temos:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como $\|\mathbf{u}\| = 5$, segue que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5,$$

ou, quadrando: $x^2 + y^2 = 25$ (ii).

De (i), vem:

$$y = \frac{3x}{4}$$

(iii).

Substituindo y em (ii), segue:

$$x^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2 = 25, \text{ ou } x^2 + \frac{9x^2}{16} = 25, \text{ ou } 16x^2 + 9x^2 = 25 \cdot 16, \text{ ou } 25x^2 = 25 \cdot 16, \text{ ou } x^2 = 16.$$

A equação $x^2 = 16$ tem duas soluções: $x = -4$ e $x = 4$.

Substituindo cada uma delas em (iii), calculamos o valor correspondente de y , e teremos dois vetores como resposta:

$$x = -4, y = -3, \mathbf{u} = (-4, -3)$$

$$x = 4, y = 3, \mathbf{u} = (4, 3).$$

5. Determine o vetor $\mathbf{u}$, sabendo que $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v} = (1, 2)$, e $\mathbf{u} \cdot (1, 3) = 35$.

Solução

Sendo $\mathbf{u}$ paralelo a $\mathbf{v}$, então existe um único número real λ , tal que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ (Ver Seção A2.1.3 – Vetores paralelos). Substituindo $\mathbf{v}$, temos: $\mathbf{u} = \lambda(1, 2)$, ou, $\mathbf{u} = (\lambda, 2\lambda)$. Levando $\mathbf{u}$ na outra relação dada no problema, temos:

$$\mathbf{u} \cdot (1, 3) = (\lambda, 2\lambda) \cdot (1, 3) = \lambda \cdot 1 + 2\lambda \cdot 3 = \lambda + 6\lambda = 7\lambda = 35, \text{ e segue que } \lambda = 5. \text{ Levando esse valor em } \mathbf{u} = (\lambda, 2\lambda), \text{ obtemos: } \mathbf{u} = (5, 10).$$

Nos Exemplos 6 e 7, teremos que trabalhar com a nossa definição de Produto Escalar e com as Propriedades. Resolveremos o Exemplo 6 detalhadamente e o Exemplo 7 mais rapidamente.

6. Sabendo que: $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, e considerando os vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, calcule:

a. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, b. $\|\mathbf{a}\|$, c. $\|\mathbf{b}\|$, d. $\cos \alpha$, sendo $\alpha = \text{âng}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

(Deixamos a cargo do leitor a tarefa de identificar as Propriedades usadas em cada passagem.)

Solução

- a. Observemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, pois $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ (Propriedade 5). Assim:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) = (2\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + (2\mathbf{u}) \cdot (3\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot (3\mathbf{v}) = \\
 &= 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (2 \cdot 3)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \\
 &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 6(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 3\|\mathbf{v}\|^2 = \\
 &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 7(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 3\|\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 7 \cdot 0 + 3\|\mathbf{v}\|^2 = \\
 &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 0 + 3\|\mathbf{v}\|^2 = \\
 &= 2\|\mathbf{u}\|^2 + 3\|\mathbf{v}\|^2 = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 8 + 27 = 35 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 35
 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{u} + \mathbf{v}) =$$

$$= (2\mathbf{u}) \cdot (2\mathbf{u}) + (2\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (2\mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} =$$

$$= (2 \cdot 2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} =$$

$$= 4\|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 4\|\mathbf{u}\|^2 + 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = 4\|\mathbf{u}\|^2 + 4 \cdot 0 + \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 4\|\mathbf{u}\|^2 + 0 + \|\mathbf{v}\|^2 = 4\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 4 \cdot 2^2 + 3^2 = 4 \cdot 4 + 9 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = 5$$

$$\text{c. } \|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) =$$

$$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{v}) + (3\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (3\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{v}) =$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + (3 \cdot 3)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) =$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 9\|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 6(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 9\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 6 \cdot 0 + 9\|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 0 + 9\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 9\|\mathbf{v}\|^2 = 2^2 + 9 \cdot 3^2 = 4 + 9 \cdot 9 = 4 + 81 = 85 \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \sqrt{85}$$

d. Da nossa definição de Produto Escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \alpha, \text{ segue:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{35}{5 \cdot \sqrt{85}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

7. Dados $\|\mathbf{u}\| = 5$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 60^\circ$, e considerando $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, calcule:

a. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, b. $\|\mathbf{a}\|$, c. $\|\mathbf{b}\|$, d. $\cos \alpha$, sendo $\alpha = \text{âng}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Solução

Primeiramente, vamos calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, usando a nossa definição de Produto Escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$

$$= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 2 \cdot (1/2) = 5 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$$

$$\text{a. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 3\|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 - 2^2 = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 - 4 = 75 + 10 - 4 = 81 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 81$$

$$\text{b. } \|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 + 2^2 = 25 + 10 + 4 = 39 \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = \sqrt{39}$$

$$\text{c. } \|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (3\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 9(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - 6(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 9\|\mathbf{u}\|^2 - 6(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 =$$

$$= 9 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 + 2^2 = 9 \cdot 25 - 6 \cdot 5 + 4 = 225 - 30 + 4 = 199 \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = \sqrt{199}$$

d. Da nossa definição de Produto Escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \alpha, \text{ segue:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{81}{\sqrt{39} \cdot \sqrt{199}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{81}{\sqrt{776}}$$

Na sequência de nossas exposições, apresentaremos uma aplicação dos vetores na Geometria Analítica Plana, mais especificamente no estudo da reta. Para isso vamos, na Seção 2, estabelecer algumas relações entre pontos e vetores, bem como as notações pertinentes. A Seção 3 será dedicada ao estudo da reta, e, ao final dessa seção, mostraremos como a abordagem tradicional pode ser obtida como um caso particular do tratamento vetorial.

A2.2 O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ versus o plano cartesiano Oxy

A2.2.1 Relação entre coordenadas de vetores e de pontos

Proposição 1

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ pontos do plano Oxy , e $\mathbf{AB}$ o vetor correspondente do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Então: $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Demonstração: (Ver Figura A2.19.)

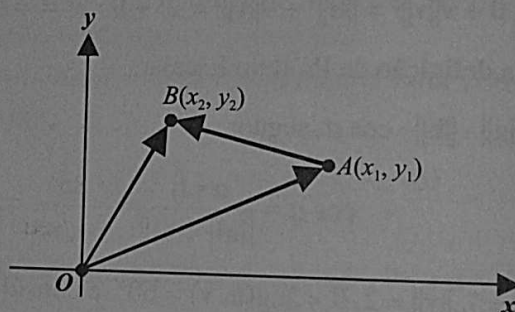


Figura A2.19

Diferença de vetores: $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$

Mas: $\mathbf{OB} = (x_2, y_2)$, $\mathbf{OA} = (x_1, y_1)$. Substituindo:

$$\mathbf{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow \mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

A2.2.2 Notação de Grassmann

Uma outra notação para o vetor $\mathbf{AB}$, denominada *notação de Grassmann*, está em conexão com a Proposição 1:

Notação de Grassmann: $\mathbf{AB} = (B - A)$.

A2.2.3 Soma de um ponto com um vetor

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1)$ do plano Oxy e um vetor $\mathbf{u} = (l, m)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Se representamos o vetor $\mathbf{u}$ por um segmento orientado com origem no ponto A , a ponta desse segmento determina um único ponto B do plano Oxy . Designando esse ponto por $B(x_2, y_2)$, temos: $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$, ou, na *notação de Grassmann*: $(B - A) = \mathbf{u}$. Escrevendo essa igualdade em termos de co-

ordenadas, e usando a Proposição 1, segue que: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (l, m)$. Igualando as coordenadas correspondentes, obtemos:

$$x_2 - x_1 = l \text{ e } y_2 - y_1 = m, \text{ ou, } x_2 = x_1 + l \text{ e } y_2 = y_1 + m; \text{ e}$$

podemos escrever o ponto B como: $B(x_1 + l, y_1 + m)$. Concluimos que cada coordenada do ponto B é obtida somando a coordenada correspondente do ponto A com a coordenada correspondente do vetor $\mathbf{u}$. Isso sugere a seguinte notação, que será muito útil na Seção 3:

$$B = A + \mathbf{u}$$

Dizemos que o ponto B é a soma do ponto A com o vetor $\mathbf{u}$, ou também, que o ponto B é o *translado* do ponto A , quando aplicamos a ele o vetor $\mathbf{u}$.

EXEMPLOS

1. Sendo $A(3, -2)$ e $B(1, 4)$, ache os vetores $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.

Solução

$$\mathbf{AB} = (B - A) = (1 - 3, 4 - (-2)) = (1 - 3, 4 + 2) = (-2, 6) \Rightarrow \mathbf{AB} = (-2, 6)$$

$$\mathbf{BA} \text{ é o oposto de } \mathbf{AB}: \mathbf{BA} = -\mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{BA} = (2, -6).$$

2. Sendo $A(2, -1)$ e $\mathbf{u} = (3, 5)$, determine o ponto $B = A + \mathbf{u}$.

Solução

$$B = A + \mathbf{u} = (2, -1) + (3, 5) = (2 + 3, -1 + 5) = (5, 4) \Rightarrow B(5, 4).$$

3. Ponto médio de um segmento de reta com extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.
Denominando $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento AB , segue que (Figura A2.20):

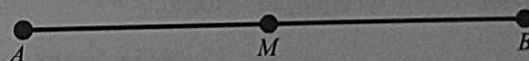


Figura A2.20

$$M \text{ é ponto médio} \Leftrightarrow \mathbf{AM} = \mathbf{MB} \Leftrightarrow (M - A) = (B - M) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_M - x_1, y_M - y_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M - x_1 = x_2 - x_M \text{ e } y_M - y_1 = y_2 - y_M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M + x_M = x_1 + x_2 \text{ e } y_M + y_M = y_1 + y_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_M = x_1 + x_2 \text{ e } 2y_M = y_1 + y_2$$

$$\text{Logo, } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\text{Podemos escrever: } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

A2.3 Estudo da reta

A2.3.1 Equação vetorial de uma reta

Sejam: $P_0(x_0, y_0)$ um ponto *dado* (fixo) do plano cartesiano Oxy , e $\mathbf{u} = (l, m)$ um vetor *dado* (fixo) do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Nesse caso, o vetor $\mathbf{u}$ determina uma *direção fixa* no plano Oxy , e existe uma infinidade de retas com essa direção (todas paralelas entre si), contidas no plano Oxy .

Dessa infinidade, uma única reta passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$. Vamos caracterizar essa reta com o auxílio dos vetores, dizendo:

Reta r , determinada pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ e pelo vetor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano Oxy , tais que o vetor $\mathbf{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{u}$. ($\mathbf{P_0P} \parallel \mathbf{u}$) (Figura A2.21).

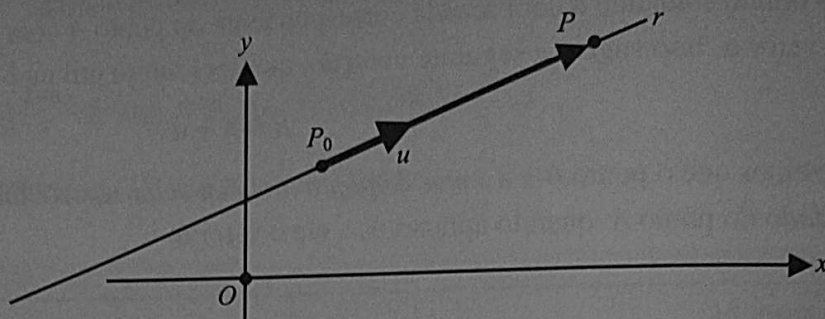


Figura A2.21

Aplicando o Resultado (Seção A2.1.3 Vetores paralelos), obtemos as equivalências: $P \in \text{reta } r \Leftrightarrow \mathbf{P_0P} \parallel \mathbf{u} \Leftrightarrow$ Existe um *único* número real t tal que $\mathbf{P_0P} = t\mathbf{u}$.

A equação $\mathbf{P_0P} = t\mathbf{u}$ é denominada *equação vetorial* da reta r . A notação de Grassmann nos fornece uma forma mais adequada dessa equação, a que denominamos *primeira forma* da equação vetorial: $(P - P_0) = t\mathbf{u}$. A notação da Seção A2.2.3, soma de ponto com vetor, nos propicia a *segunda forma* da equação vetorial: $P = P_0 + t\mathbf{u}$.

Em termos de coordenadas, escrevemos:

(i) Primeira forma da equação vetorial:

$$(x - x_0, y - y_0) = t(l, m) \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Segunda forma da equação vetorial:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m) \quad t \in \mathbb{R}$$

Nomenclatura

As designações usuais são:

$P_0(x_0, y_0)$: Ponto-base da reta r

$\mathbf{u} = (l, m)$: Vetor diretor da reta r

t : Parâmetro da reta r

A2.3.2 Equações paramétricas

Se a partir da equação vetorial (segunda forma) desenvolvemos as operações indicadas, vem:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m) \Rightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + (tl, tm) \Rightarrow (x, y) = (x_0 + tl, y_0 + tm).$$

Igualando as correspondentes coordenadas, obtemos duas equações que fornecem as coordenadas de um ponto qualquer $P(x, y)$ da reta r em função do parâmetro t , sendo por isso denominadas *equações paramétricas* da reta r :

$$r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

EXEMPLOS

1. Ache as equações: vetorial (primeira e segunda formas) e paramétricas de cada reta especificada a seguir:

- Da reta r , que passa pelo ponto $A(-2, 3)$ e tem a direção do vetor $\mathbf{u} = (1, 5)$.
- Da reta s , que passa pelo ponto $B(0, 0)$ e tem a direção do vetor $\mathbf{v} = (2, 0)$.
- Da reta p , que passa pelo ponto $C(6, 0)$ e tem a direção do vetor $\mathbf{w} = (0, -7)$.

Solução

(No que se segue, x e y serão as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à reta em questão.)

a. Equação vetorial – primeira forma:

$$(P - A) = t \mathbf{u} \Rightarrow (x - (-2), y - 3) = t(1, 5) \Rightarrow (x + 2, y - 3) = t(1, 5).$$

Equação vetorial – segunda forma:

$$P = A + t \mathbf{u} \Rightarrow (x, y) = (-2, 3) + t(1, 5)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (-2, 3) + t(1, 5) \Rightarrow (x, y) = (-2, 3) + (t \cdot 1, t \cdot 5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = (-2, 3) + (t, 5t) \Rightarrow (x, y) = (-2 + t, 3 + 5t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b. Equação vetorial – primeira forma:

$$(P - B) = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (x - 0, y - 0) = \lambda(2, 0) \Rightarrow (x, y) = \lambda(2, 0).$$

Equação vetorial – segunda forma:

$$P = B + \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) + \lambda(2, 0).$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (0, 0) + \lambda(2, 0) = (0, 0) + (2\lambda, 0) = (2\lambda, 0) \Rightarrow (x, y) = (2\lambda, 0) \\ &\Rightarrow r \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c. Equação vetorial – primeira forma:

$$(P - C) = \mu \mathbf{w} \Rightarrow (x - 6, y - 0) = \mu(0, -7) \Rightarrow (x - 6, y) = \mu(0, -7)$$

Equação vetorial – segunda forma:

$$P = C + \mu \mathbf{w} \Rightarrow (x, y) = (6, 0) + \mu(0, -7).$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (6, 0) + \mu(0, -7) = (6, 0) + (0, -7\mu) = (6, -7\mu) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = (6, -7\mu) \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \begin{cases} x = 6 \\ y = -7\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. Ache as equações vetorial (primeira e segunda formas) e paramétricas da reta r , que passa pelos pontos $A(2, -1)$ e $B(5, 7)$.

Solução

(No que se segue, indicaremos um ponto qualquer da reta r por $P(x, y)$) (Figura A2.22).

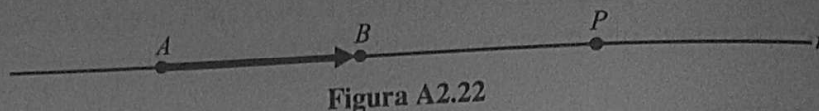


Figura A2.22

Ponto-base : A ou B

Vetor diretor: $\mathbf{AB}$ ou $\mathbf{BA}$ (ou qualquer vetor paralelo a $\mathbf{AB}$)

Observemos então, que uma reta pode ter uma *infinitude* de equações vetoriais.

Escolhemos $A(2, -1)$ como ponto-base e $\mathbf{AB}$ como vetor diretor.

Calculando: $\mathbf{AB} = (B - A) = (5 - 2, 7 - (-1)) = (5 - 2, 7 + 1) = (3, 8)$

$\Rightarrow \mathbf{AB} = (3, 8)$

Equação vetorial – primeira forma:

$$(P - A) = t\mathbf{AB} \Rightarrow (x - 2, y - (-1)) = t(3, 8) \Rightarrow (x - 2, y + 1) = t(3, 8).$$

Equação vetorial – segunda forma:

$$P = A + t\mathbf{AB} \Rightarrow (x, y) = (2, -1) + t(3, 8).$$

Equações paramétricas:

$$(x, y) = (2, -1) + t(3, 8) = (2, -1) + (3t, 8t) = (2 + 3t, -1 + 8t) \Rightarrow (x, y) = (2 + 3t, -1 + 8t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 8t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Ache as equações vetorial (primeira e segunda formas) e paramétricas da reta r , que passa pelo ponto $A(0, -1)$ e pelo ponto médio do segmento com extremos $B(-1, 4)$ e $C(7, -8)$.

Solução

Denominando $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento BC , temos, conforme o Exemplo 3 da Seção A2.2.3:

$$x_M = \frac{(-1 + 7)}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad y_M = \frac{(4 + (-8))}{2} = \frac{4 - 8}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow M(3, -2)$$

Escolhemos $A(0, -1)$ como ponto-base e $\mathbf{AM}$ como vetor diretor da reta r .

Calculando:

$$\mathbf{AM} = (M - A) = (3 - 0, -2 - (-1)) = (3 - 0, -2 + 1) = (3, -1) \Rightarrow \mathbf{AM} = (3, -1).$$

Denominando $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta r , temos:

Equação vetorial – primeira forma:

$$(P - A) = t\mathbf{AM} \Rightarrow (x - 0, y - (-1)) = t(3, -1) \Rightarrow (x, y + 1) = t(3, -1)$$

Equação vetorial – segunda forma:

$$P = A + t\mathbf{AM} \Rightarrow (x, y) = (0, -1) + t(3, -1)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (0, -1) + t(3, -1) = (0, -1) + (3t, -t) = \\ &= (0 + 3t, (-1) + (-t)) = (3t, -1 - t) \Rightarrow (x, y) = (3t, -1 - t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

4. Considerando a reta

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pede-se:

Verifique quais pontos dados a seguir pertencem (ou não) a ela.

- a. $A(1, 2)$ b. $B(-5, 5)$ c. $C(3, -7)$

Solução

Lembrando a teoria: Um ponto dado P pertence à reta $r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ existe um *único* número real t tal que: $P = P_0 + t\mathbf{u}$.

Vamos aplicar isso a cada caso:

- a. $A(1, 2)$: Se A pertence à reta r , então, se substituirmos, nas equações paramétricas, x por 1 (abscissa de A), y por 2 (ordenada de A) e calculamos o valor do parâmetro t , temos que obter o mesmo (único) valor de t para os dois cálculos. Vejamos:

$$\begin{aligned}1 &= -1 + 2t \Rightarrow 2t = 1 + 1 \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \\ 2 &= 3 - t \Rightarrow t = 3 - 2 \Rightarrow t = 1\end{aligned}$$

Portanto: $A(1, 2)$ pertence à reta r .

- b. $B(-5, 5)$: Substituindo x por -5 na primeira equação:

$$-5 = -1 + 2t \Rightarrow 2t = -5 + 1 \Rightarrow 2t = -4 \Rightarrow t = -2$$

Substituindo y por 5 na segunda equação:

$$5 = 3 - t \Rightarrow t = 3 - 5 \Rightarrow t = -2$$

Portanto: $B(-5, 5)$ pertence à reta r .

- c. $C(7, -8)$: Substituindo x por 7 na primeira equação:

$$7 = -1 + 2t \Rightarrow 2t = 7 + 1 \Rightarrow 2t = 8 \Rightarrow t = 4$$

Substituindo y por -8 na segunda equação:

$$-8 = 3 - t \Rightarrow t = 3 + 8 \Rightarrow t = 11 \neq 4$$

Portanto: $C(7, -8)$ não pertence à reta r . ■

A2.3.3 Paralelismo

No Exemplo 2 da Seção A2.3.2, fizemos a observação de que uma reta tem uma infinidade de equações vetoriais, de acordo com o ponto-base escolhido e o vetor diretor. Destacamos o fato de que qualquer vetor paralelo a um dado vetor diretor determina a mesma direção.

Essa observação dá ensejo à seguinte questão: dadas duas equações vetoriais, com respectivos pontos-base e vetores diretores *paralelos*, como determinar se essas equações representam a mesma reta ou retas paralelas distintas?

Consideremos então:

- Uma reta r , com ponto-base P_0 e vetor diretor $\mathbf{u}_r$
- Uma reta s , com ponto-base Q_0 e vetor diretor $\mathbf{u}_s$
- A condição sobre os vetores diretores é: $\mathbf{u}_r \parallel \mathbf{u}_s$

A observação pensante da Figura A2.23 praticamente resolve nossa questão.

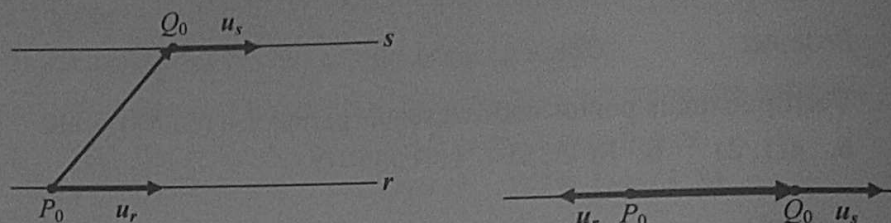


Figura A2.23

(i) $r \parallel s$ (ii) $r \equiv s$

Na Figura 3.1. (i): P_0Q_0 não é paralelo a $\mathbf{u}_r$ (ou a $\mathbf{u}_s$) $\Rightarrow$ as retas r e s são paralelas distintas ($r \parallel s$).

Na Figura 3.1. (ii): P_0Q_0 é paralelo a $\mathbf{u}_r$ (ou a $\mathbf{u}_s$) $\Rightarrow$ as retas r e s são coincidentes ($r \equiv s$).

Observação: Se os vetores diretores de duas retas não são paralelos, então elas se interceptam em um único ponto P_i .

Escrevemos: $P_i = \{r \cap s\}$. Veremos isso nos exemplos a seguir.

EXEMPLOS

Em cada exemplo a seguir, são dadas as equações de duas retas.

Verifique se elas são paralelas, coincidentes ou concorrentes. Se forem concorrentes, ache o ponto de intersecção P_i .

1. $r \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ e $s \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \end{cases}$

2. $r\{(x, y) = (0, 5) + t(-2, 1)\}$ e $s\{(x, y) = (3, 0) + \lambda(4, -2)\}$

3. $r\{(x, y) = (7, 1) + t(5, 0)\}$ e $s\{(x, y) = (-8, 1) + \lambda(10, 0)\}$

4. $r \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - t \end{cases}$ e $s \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 + 3\lambda \end{cases}$

5. $r \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ e $s \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{cases}$

6. $r\{(x, y) = (0, 4) + t(1, 1)\}$ e $s\{(x, y) = (2, 2) + \lambda(5, 1)\}$

Observação preliminar: Para verificar o paralelismo (ou não) dos vetores, aplicaremos o critério exposto na Seção A2.1.8.c. Para facilitar, vamos reproduzi-lo aqui:
Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ vetores não-nulos.

O resultado da Seção A2.1.3 diz que: $u // v \Leftrightarrow u = \alpha v$, para um único número real α . Em termos de coordenadas:

$$u // v \Leftrightarrow x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2 \text{ (coordenadas correspondentes proporcionais).}$$

Se, em particular, por exemplo, $x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$, então vale:

$$u // v \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Soluções

(Primeiramente, achamos o ponto-base e o vetor diretor de cada reta.)

1. Reta r : $P_0(1, -2)$ (Ponto-base), $u_r = (1, 3)$ (Vetor diretor)

Reta s : $Q_0(-1, 1)$ (Ponto-base), $u_s = (2, 6)$ (Vetor diretor)

Dividindo as correspondentes coordenadas dos vetores u_s e u_r (nessa ordem):

$$2/1 = 2, 6/3 = 2 \Rightarrow 2/1 = 6/3 \Rightarrow \text{são proporcionais} \Rightarrow u_r // u_s.$$

Nesse caso, as retas podem ser paralelas distintas, ou coincidentes. Calculemos P_0Q_0 :

$$P_0Q_0 = (Q_0 - P_0) = (-1 - 1, 1 - (-2)) = (-1 - 1, 1 + 2) = (-2, 3).$$

Dividindo as correspondentes coordenadas de P_0Q_0 e u_r :

$$-2/1 = -2, 3/3 = 1 \Rightarrow -2/1 \neq 3/3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0Q_0 \not// u_r$$

$$\Rightarrow (\text{os vetores não são paralelos}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r // s \text{ (as retas são paralelas distintas).}$$

Observação: Poderíamos ter comparado P_0Q_0 com u_s , pois sendo $u_r // u_s$, a conclusão seria a mesma. (Pense sobre isso.)

Como já estabelecemos as notações e a terminologia no Exemplo 1, omitiremos detalhes supérfluos na resolução dos exemplos seguintes.

2. Reta r : $P_0(0, 5)$, $u_r = (-2, 1)$

Reta s : $Q_0(3, 0)$, $u_s = (4, -2)$

Dividindo as correspondentes coordenadas de u_r e u_s (poderia ser ao contrário):

$$-2/4 = -1/2, 1/-2 = -1/2 \Rightarrow u_r // u_s$$

$$P_0Q_0 = (Q_0 - P_0) = (3 - 0, 0 - 5) = (3, -5)$$

Dividindo as correspondentes coordenadas de P_0Q_0 e u_s :

$$3/4 \neq -5/-2 = 5/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0Q_0 \not// u_s$$

$$\Rightarrow r // s$$

3. Reta r : $P_0(7, 1)$, $u_r = (5, 0)$

Reta s : $Q_0(-8, 1)$, $u_s = (10, 0)$

Nesse caso, não podemos dividir as correspondentes coordenadas dos vetores, mas observe:

$$u_s = (10, 0) = 2(5, 0) = 2u_r \Rightarrow u_r // u_s$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 &= (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0) = (-8 - 7, 1 - 1) = (-15, 0) = -3(5, 0) = -3\mathbf{u}_r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 \parallel \mathbf{u}_r \Rightarrow r \equiv s \text{ (as retas são coincidentes)} \end{aligned}$$

4. Reta r : $\mathbf{P}_0(3, 2)$, $\mathbf{u}_r = (0, -1)$

Reta s : $\mathbf{Q}_0(3, -4)$, $\mathbf{u}_s = (0, 3)$

$$\mathbf{u}_s = (0, 3) = -3(0, -1) = -3\mathbf{u}_r \Rightarrow \mathbf{u}_r \parallel \mathbf{u}_s$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0) = (3 - 3, -4 - 2) = (0, -6) = 6(0, -1) = 6\mathbf{u}_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 \parallel \mathbf{u}_r \Rightarrow r \equiv s \text{ (as retas são coincidentes)}$$

5. Reta r : $\mathbf{P}_0(3, 2)$, $\mathbf{u}_r = (-1, 3)$

Reta s : $\mathbf{Q}_0(1, 3)$, $\mathbf{u}_s = (2, 4)$

Divisão das correspondentes coordenadas dos vetores diretores:

$$-1/2, 3/4 \Rightarrow -1/2 \neq 3/4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_r \not\parallel \mathbf{u}_s$$

$\Rightarrow$ As retas se interceptam em um único ponto $P_i = \{r \cap s\}$ (Figura A2.24).

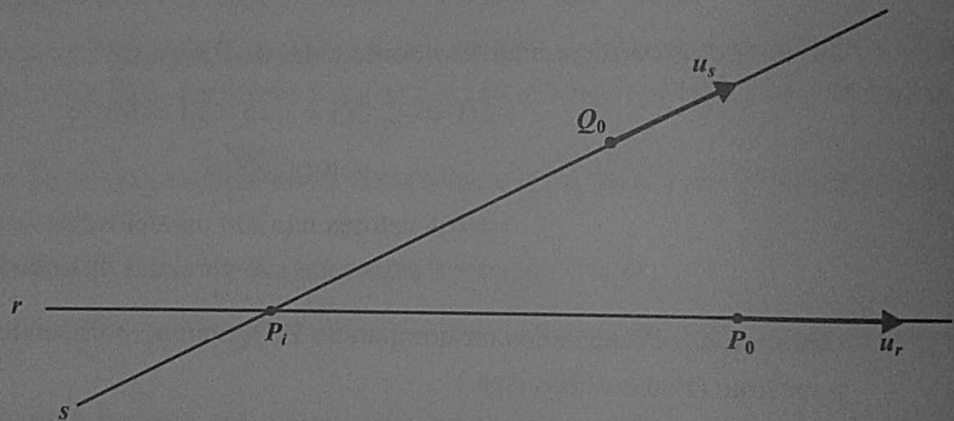


Figura A2.24

Vamos expor o raciocínio necessário para determinar o ponto P_i :

Primeiramente, escrevemos as equações paramétricas da reta r e colocamos lado a lado ambas as equações:

$$r \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$$

Sendo $P_i(x_i, y_i)$ o ponto de intersecção das duas retas, segue que:

$P_i(x_i, y_i) \in \text{reta } r \Leftrightarrow$ existe um único $t_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_i = 3 - t_i$$

$$y_i = 2 + 3t_i$$

e $P_i(x_i, y_i) \in \text{reta } s \Leftrightarrow$ existe um único $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_i = 1 + 2\lambda_i$$

$$y_i = 3 + 4\lambda_i$$

Isso acarreta:

$$\begin{aligned} 3 - t_i &= 1 + 2\lambda_i \\ 2 + 3t_i &= 3 + 4\lambda_i \end{aligned}$$

que é um sistema linear nas incógnitas t_i e λ_i . Escrevendo na forma usual:

$$\begin{aligned} t_i + 2\lambda_i &= 2 \\ 3t_i - 4\lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

No Capítulo 2 – Sistemas Lineares –, abordamos a resolução de Sistemas Lineares; mas vamos resolver este, que é bem simples, de modo mais rápido.

Multiplicando a primeira equação por 2, e reescrevendo, vem:

$$\begin{aligned} 2t_i + 4\lambda_i &= 4 \\ 3t_i - 4\lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

Somando essas equações membro a membro:

$$2t_i + 4\lambda_i + 3t_i - 4\lambda_i = 4 + 1 \Rightarrow 5t_i = 5 \Rightarrow t_i = 1.$$

Substituindo $t_i = 1$ nas equações paramétricas da reta r , obtemos:

$$x_i = 3 - 1 \text{ e } y_i = 2 + 3 \cdot 1 \Rightarrow x_i = 2 \text{ e } y_i = 5 \Rightarrow P_i(2, 5)$$

Se quisermos verificar esse resultado, podemos calcular λ_i , substituindo $t_i = 1$ em uma das equações, por exemplo, na segunda equação:

$$3 \cdot 1 - 4\lambda_i = 1 \Rightarrow 3 - 4\lambda_i = 1 \Rightarrow -4\lambda_i = 1 - 3 \Rightarrow -4\lambda_i = -2 \Rightarrow \lambda_i = \frac{1}{2}$$

Levando esse valor nas equações paramétricas da reta s , temos que achar a mesma resposta para o ponto de intersecção: $P_i(2, 5)$ (verifique).

6. Reta r : $P_0(0, 4)$; $\mathbf{u}_r = (1, 1)$

Reta s : $Q_0(2, 2)$; $\mathbf{u}_s = (5, 1)$

$$\begin{aligned} 5/1 &= 5; 1/1 = 1 \Rightarrow 5/1 \neq 1/1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{u}_r \not\parallel \mathbf{u}_s \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ As retas se interceptam em um único ponto $P_i = \{r \cap s\}$. Vamos determinar o ponto de intersecção mais rapidamente (ver detalhes no Exemplo 6).

Equações paramétricas:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 4 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$$

Igualando as correspondentes equações:

$$\begin{aligned} t &= 2 + 5\lambda & \text{ou} & & t - 5\lambda &= 2 \\ 4 + t &= 2 + \lambda & & & t - \lambda &= -2 \end{aligned}$$

Resolvendo, calculamos $t = -3$ e $\lambda = -1$.

Levando $t = -3$ nas equações da reta r , ou $\lambda = -1$ nas equações da reta s , obtemos: $P_i(-3, 1)$.
(Verifique.)

A2.3.4 Perpendicularismo

Sejam:

Reta r , com ponto-base P_0 , e vetor diretor $\mathbf{u}_r$.

Reta s , com ponto-base Q_0 , e vetor diretor $\mathbf{u}_s$.

Como vimos, se os vetores diretores não são paralelos, as retas se interceptam em um único ponto P_i . Dentro dessa possibilidade, um caso especial ocorre quando os vetores diretores são *ortogonais* ($\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s$) e, como consequência, as retas r e s são *perpendiculares* ($r \perp s$).

Para verificar quando isso acontece, usamos a Propriedade 6 do Produto Escalar: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Vamos aos Exemplos.

EXEMPLOS

1. Dadas as retas

$$r \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 8 - \lambda \end{cases}$$

Pede-se: a. Mostre que elas são perpendiculares

b. Ache $P_i = \{r \cap s\}$.

Solução

a. Reta r : $P_0(2, -1)$; $\mathbf{u}_r = (1, 1)$

Reta s : $Q_0(3, 8)$; $\mathbf{u}_s = (1, -1)$

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s \Rightarrow r \perp s$$

b. Intersecção:

Igualando as correspondentes equações paramétricas:

$$\begin{array}{ll} 2 + t = 3 + \lambda & \text{ou} \quad t - \lambda = 1 \\ -1 + t = 8 - \lambda & t + \lambda = 9 \end{array}$$

Resolvendo: $t = 5$ e $\lambda = 4$

Levando um dos valores calculados nas equações correspondentes, vem: $P_i(7, 4)$.

2. Dada a reta

$$r \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Pede-se:

- equações paramétricas da reta s , que passa pelo ponto $A(1, -4)$ e é perpendicular à reta r .
- A projeção ortogonal (A') do ponto A sobre a reta r (A' também é denominado pé da perpendicular baixada de A sobre a reta r).
- O ponto A'' , simétrico de A' em relação à reta r .

Solução

a. Seja $\mathbf{u}_s = (l, m)$ o vetor diretor da reta s . Sendo s e r perpendiculares, vem:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s &\Leftrightarrow \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1, 1) \cdot (l, m) = 0 \Leftrightarrow -1 + m = 0 \Leftrightarrow l = m. \end{aligned}$$

Fazendo $l = 1$ (o mais simples), temos $m = 1$, e $\mathbf{u}_s = (1, 1)$. Como a reta s passa por $A(1, -4)$, suas equações paramétricas são:

$$s \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \end{cases}$$

b. Para melhor compreensão dos itens (b) e (c), veja a Figura A2.25.



Figura A2.25

O ponto A' , projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r , é a intersecção das retas r e s . Igualando as correspondentes equações paramétricas:

$$\begin{aligned} 2 - t &= 1 + \lambda & \text{ou} & & t + \lambda &= 1 \\ 1 + t &= -4 + \lambda & & & t - \lambda &= -5 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, achamos: $t = -2$ e $\lambda = 3$.

Levando um dos valores calculados nas correspondentes equações paramétricas, obtemos: $A'(4, -1)$.

c. A' é o ponto médio do segmento AA'' . Logo:

$A'' = A + 2\mathbf{AA}'$ (Também vale: $A'' = A' + \mathbf{AA}'$ – ver Figura A2.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}' &= (A' - A) = (4 - 1, -1 - (-4)) = (4 - 1, -1 + 4) = (3, 3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{AA}' = (3, 3) \end{aligned}$$

E vem:

$$\begin{aligned} A'' &= A + 2\mathbf{AA}' = (1, -4) + 2(3, 3) = \\ &= (1, -4) + (2 \cdot 3, 2 \cdot 3) = (1, -4) + (6, 6) = (1 + 6, -4 + 6) = (7, 2) \Rightarrow A''(7, 2). \end{aligned}$$

3. Dadas as retas

$$r \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

Pede-se:

Ache equações paramétricas da reta s' , simétrica da reta s em relação à reta r .

Solução

Vamos primeiramente determinar a posição relativa das retas, para podermos representá-las geometricamente de modo adequado.

Reta r : $P_0(1, 1)$; $\mathbf{u}_r = (-1, 2)$

Reta s : $Q_0(2, 1)$; $\mathbf{u}_s = (1, -4)$

$$1/-1 = -1, -4/2 = -2; 1/-1 \neq -4/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_r \not\parallel \mathbf{u}_s$$

$\Rightarrow$ As retas se interceptam em um único ponto $P_i = \{r \cap s\}$. Fazendo os cálculos, obtemos: $P_i(3, -3)$ (Deixamos a verificação a cargo do leitor.)

Veja a Figura A2.26, para melhor compreensão da solução.

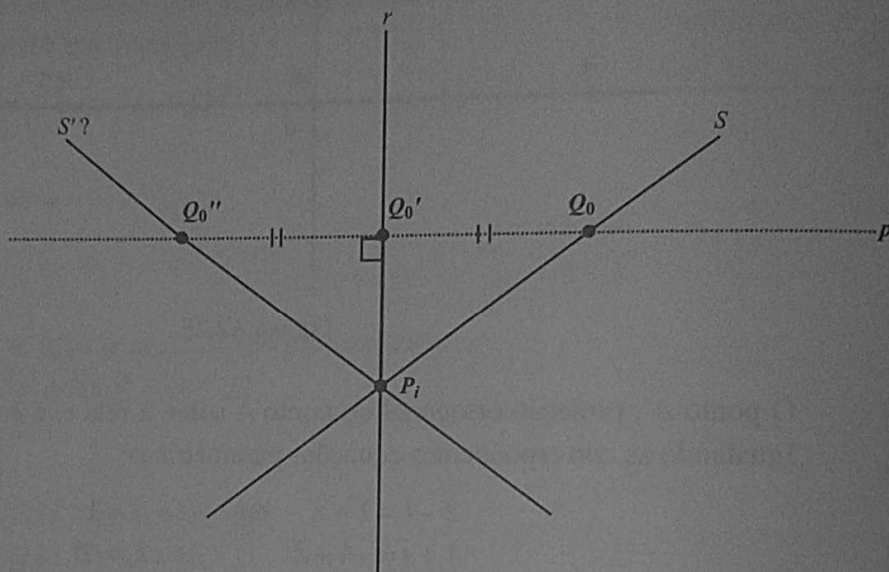


Figura A2.26

Se escolhemos um ponto qualquer da reta s , o simétrico desse ponto em relação à reta r pertence à reta s' . Em particular, P_i pertence às três retas.

Tomando o ponto-base Q_0 , vamos aplicar o procedimento descrito no Exemplo 2 e determinar os pontos Q_0' (Projeção Ortogonal de Q_0 sobre a reta r) e Q_0'' (Simétrico de Q_0 em relação à reta r) (figura do Exemplo 2). Como, nos exemplos anteriores, já descrevemos em detalhes as etapas necessárias, abreviaremos os cálculos.

Determinação de Q_0' :

Sendo p a reta perpendicular a r passando por Q_0 , então:

$$Q_0' = \{r \cap p\}$$

Reta p : $Q_0(2, 1)$ (Ponto-base)

$\mathbf{u}_p = (4, 2)$ (Vetor diretor) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p \begin{cases} x = 2 + 4\mu \\ y = 1 + 2\mu \end{cases}$$

Igualando as correspondentes coordenadas das retas p e r :

$$1 - t = 2 + 4\mu$$

$$1 + 2t = 1 + 2\mu$$

Resolvendo o sistema: $t = -1/5, \mu = -1/5$

Levando um dos valores nas correspondentes equações, obtemos: $Q_0'(6/5, 3/5)$

Determinação de Q_0'' :

$$\begin{aligned} Q_0'' &= Q_0' + Q_0 Q_0' = Q_0' + (Q_0' - Q_0) = \\ &= (6/5, 3/5) + (6/5 - 2, 3/5 - 1) = (6/5, 3/5) + (-4/5, -2/5) = \\ &= (6/5 - 4/5, 3/5 - 2/5) = (2/5, 1/5) \Rightarrow Q_0''(2/5, 1/5). \end{aligned}$$

E vem:

Reta s' : Ponto-base: $P_1(3, -3)$

Vetor diretor tem a direção do vetor $(Q_0'' - P_1) = (-13/5, 16/5) = (1/5)(-13, 16)$, logo:

Vetor diretor da reta $s' = (-13, 16)$.

Portanto:

$$s' \begin{cases} x = 3 - 13\rho \\ y = -3 + 16\rho \end{cases}$$

Observação: Se as retas r e s forem paralelas, escolhemos um ponto arbitrário da reta s e determinamos o correspondente ponto simétrico em relação à reta r . A reta s' passa por esse último, e tem o mesmo vetor diretor que a reta r ($r \parallel s$). ■

A2.3.5 Equação reduzida

Na Geometria Analítica elementar, denomina-se equação reduzida de uma reta r a equação

$$y = ax + b$$

Sendo:

a : constante real, denominada *inclinação*, ou *coeficiente angular* da reta r .

b : constante real, denominada *coeficiente linear* da reta r .

Revisão rápida:

a = Tangente trigonométrica do ângulo entre a reta r e o semi-eixo positivo Ox – mede a maior ou menor inclinação da reta r .

Reta horizontal $\Leftrightarrow a = 0$

Reta vertical $\Leftrightarrow$ Não existe a

b = ordenada do ponto onde a reta r corta o eixo Oy ($x = 0$).

Ver Figura A2.27.

$a = \tan \alpha$

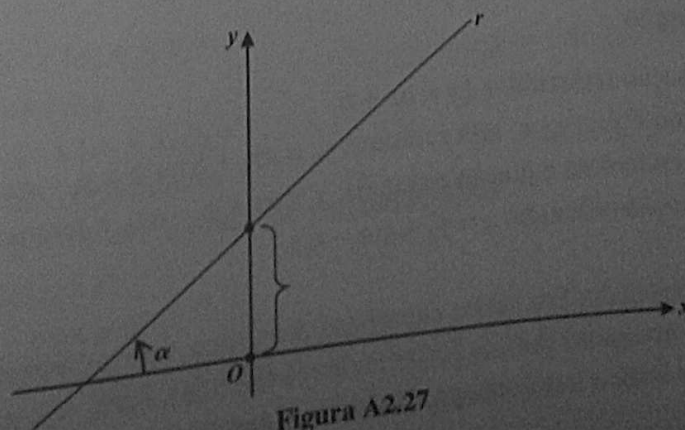


Figura A2.27

Para finalizar nosso estudo, vamos abordar a equação reduzida de uma reta como uma forma particular de parametrização e reenunciar os resultados já obtidos em termos da equação reduzida. Nosso parâmetro será $x = t$:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = b + at \end{cases}$$

Com essa escolha, o ponto-base é $P_0(0, b)$ (intersecção da reta com o eixo Oy), e o vetor diretor é $\mathbf{u}_r = (1, a)$.

Reenunciados:

Dadas as equações reduzidas das retas r e s :

$$r: y = a_1x + b_1 \text{ e } s: y = a_2x + b_2$$

$$r: P_0(0, b_1) \text{ (Ponto-base); } \mathbf{u}_r = (1, a_1) \text{ (Vetor diretor)}$$

$$s: Q_0(0, b_2) \text{ (Ponto-base); } \mathbf{u}_s = (1, a_2) \text{ (Vetor diretor)}$$

Temos os resultados:

1. Paralelismo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r // \mathbf{u}_s &\Leftrightarrow \text{Existe um único número real } \alpha \text{ tal que: } \mathbf{u}_r = \alpha \mathbf{u}_s \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1, a_1) = \alpha(1, a_2) \Leftrightarrow (1, a_1) = (\alpha, \alpha \cdot a_2) \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ e } a_1 = \alpha \cdot a_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 \end{aligned}$$

Portanto, se $a_1 = a_2$, temos:

- Se $b_1 \neq b_2$, então $r \nparallel s$;
- Se $b_1 = b_2$, então $r \equiv s$

2. Perpendicularismo

$$\begin{aligned} r \perp s &\Leftrightarrow \mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s \Leftrightarrow \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s = 0 \Leftrightarrow (1, a_1) \cdot (1, a_2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot 1 + a_1 \cdot a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto: } r \perp s \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$$

EXEMPLOS

- Ache a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto dado $P_0(x_0, y_0)$ e tem inclinação dada a .

Solução

$$\text{Equação reduzida: } r \{ y = ax + b$$

$$\text{Como } P_0(x_0, y_0) \in \text{reta } r, \text{ temos: } y_0 = ax_0 + b \Rightarrow b = y_0 - ax_0$$

$$\text{Levando } b \text{ na equação reduzida: } y = ax + y_0 - ax_0, \text{ e temos:}$$

$$\text{Equação reduzida: } y = y_0 + a(x - x_0)$$

Observação: Em vários exercícios propostos, será necessário achar a equação reduzida de uma reta que passa por um ponto dado (conhecido), $P_0(x_0, y_0)$, e tem inclinação dada (conhecida) a . Para isso, o leitor sempre deve usar a equação anterior!

Exemplificando com valores numéricos:

Ache a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P_0(2, 5)$ e tem inclinação $a = 3$.

Solução

$x_0 = 2, y_0 = 5$. Substituindo na equação acima, vem:

$$y = 5 + 3(x - 2) = 5 + 3x - 6 \Rightarrow r \{ y = 3x - 1$$

2. Ache a equação reduzida da reta

$$r \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$$

Solução

Eliminamos t e escrevemos y em função de x .

Por exemplo:

De $x = -2 + t$, obtemos: $t = x + 2$. Levando na segunda equação paramétrica:

$$y = 4 - 3(x + 2) = 4 - 3x - 6 = -3x - 2 \Rightarrow r \{ y = -3x - 2$$

3. Ache a equação reduzida da reta

$$r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

Solução

Idem:

$$t = \frac{x - 1}{2} \Rightarrow y = 4 + 3\left(\frac{x - 1}{2}\right) = 4 + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow s \left\{ y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2} \right.$$

4. Verifique, em cada caso dado, se as retas são paralelas ou concorrentes. Caso sejam concorrentes, verifique se elas são perpendiculares ou não, e ache o ponto de intersecção P_i .

a. $r \{ y = 3x + 5$ e $s \{ y = 3x - 2$

b. $r \{ y = 2x - 1$ e $s \{ y = x + 1$

c. $r \left\{ y = \frac{2}{3}x + 2 \right.$ e $s \left\{ y = -\frac{3}{2}x + 1 \right.$

Solução

a. $r \{ a_1 = 3, b_1 = 5$ e $s \{ a_2 = 3, b_2 = -2$

$$a_1 = a_2, b_1 \neq b_2 \Rightarrow r \parallel s$$

b. $r \{ a_1 = 2, b_1 = -1$ e $s \{ a_2 = 1, b_2 = 1$

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow r \text{ e } s \text{ são concorrentes}$$

$$a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot 1 = 2 \neq -1 \Rightarrow r \text{ e } s \text{ não são perpendiculares.}$$

Intersecção $P_i = \{r \cap s\}$:

Igualando y de r com y de s :

$$2x - 1 = x + 1 \Rightarrow 2x - x = 1 + 1 \Rightarrow x = 2$$

Levando $x = 2$ em r ou em s , obtemos $y = 3 \Rightarrow P_i(2, 3)$

$$c. \quad r \left\{ a_1 = \frac{2}{3}, b_1 = 2 \right\} \quad s \left\{ a_2 = -\frac{3}{2}, b_2 = 1 \right\}$$

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow r$ e s são concorrentes

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -1 \Rightarrow r \text{ e } s \text{ são perpendiculares}$$

Intersecção $P_i = \{r \cap s\}$:

Igualando y de r com y de s :

$$\frac{2}{3}x + 2 = -\frac{3}{2}x + 1 \Rightarrow 4x + 12 = -9x + 6 \Rightarrow 13x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{13}$$

Levando $x = -\frac{6}{13}$ em r ou s , calculamos: $y = \frac{22}{13} \Rightarrow P_i \left(-\frac{6}{13}, \frac{22}{13} \right)$

5. Calcule k para que as retas

$$r \{y = (2k + 1)x + 3 \text{ e } s \{y = 9x + 1$$

sejam paralelas.

Solução

$$r \{a_1 = 2k + 1, b_1 = 3 \quad s \{a_2 = 9, b_2 = 1$$

$$a_1 = a_2 \Leftrightarrow 2k + 1 = 9 \Leftrightarrow k = 4 \text{ (como } b_1 \neq b_2, r \parallel s)$$

6. Calcule k para que as retas

$$r \{y = -kx + 5 \text{ e } s \{y = k^3x + 2005$$

sejam perpendiculares.

Solução

$$r \{a_1 = -k \quad s \{a_2 = k^3$$

$$r \perp s \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1 \Leftrightarrow (-k) \cdot (k^3) = -1 \Leftrightarrow k^4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -1 \text{ ou } k = 1$$

7. Dada a reta $r \{y = x + 7$, e o ponto $A(2, -1)$, pede-se:

a. O ponto A' , projeção ortogonal de A sobre a reta r .

b. O ponto A'' , simétrico de A em relação à reta r .

Solução

a. Seja s a reta que passa por A e é perpendicular à reta r . Então:

$$\text{Inclinação da reta } r: a_1 = 1$$

$$\text{Inclinação da reta } s: a_2$$

$$r \perp s \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

Como s passa por $A(2, -1)$, usando a fórmula do exemplo 1, temos:

$$\text{Reta } s: y = -1 + (-1)(x - 2) \Rightarrow s \{y = -x + 1$$

Agora, $A' = \{r \cap s\}$; e para determinar A' , igualamos os y das retas r e s : $x + 7 = -x + 1 \Rightarrow$

$$2x = -6 \Rightarrow x = -3. \text{ Levando em } r \text{ ou em } s, \text{ calculamos } y = 4, \text{ logo: } A'(-3, 4)$$

b. $A'' = A' + AA' = A' + (A' - A) = (-3, 4) + (-5, 5) \Rightarrow A''(-8, 9)$

I. Vetores

1. Calcule k para que os vetores $u = (2k - 1, 6)$ e $v = (k, 2)$ sejam paralelos.

Resposta: $k = -1$

2. Determine o vetor u , sabendo que u é paralelo a $v = (1, -2)$ e $\|u\| = 3\sqrt{5}$.

Resposta: $u = (-3, 6)$ ou $u = (3, -6)$

3. Ache os vetores u e v , sabendo que:

a. $u + v = (2, 3)$

b. $u \parallel (1, 1)$

c. $\|v\| = \sqrt{13}$.

Respostas: $u = (0, 0)$ e $v = (2, 3)$, ou, $u = (5, 5)$ e $v = (-3, -2)$

4. Sendo $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$, $u \perp v$, e sabendo que $a = u + 2v$, $b = 3u$, pede-se:

a. $a \cdot b$ b. $\|a\|$ c. $\|b\|$ d. $\alpha = \text{âng}(a, b)$.

Resposta:

a. $a \cdot b = 12$

b. $\|a\| = 2\sqrt{2}$

c. $\|b\| = 6$

d. $\alpha = 45^\circ$

5. Sendo $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$, $\theta = \text{âng}(u, v) = 60^\circ$ ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$), e sabendo que $a = u + 2v$, $b = 2u + v$, pede-se:

a. $a \cdot b$ b. $\|a\|$ c. $\|b\|$ d. $\cos \alpha$, $\alpha = \text{âng}(a, b)$.

$\left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right)$

Resposta:

a. $a \cdot b = 15$

b. $\|a\| = \sqrt{21}$

c. $\|b\| = 2\sqrt{3}$

d. $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

6. Ache $u = (x, y)$, sabendo que: (i) $u \parallel (-2, 5)$ e (ii) $u \cdot (3, -1) = -33$.

Resposta: $u = (-6, 15)$

7. Ache $u = (l, m)$, sabendo que: (i) $u \perp (-2, 3)$ e (ii) $\|u\| = \sqrt{13}$.

Resposta: $u = (-3, -2)$ ou $u = (3, 2)$

II. Geometria analítica plana – estudo da reta

(Miscelânea: Equação vetorial, equações paramétricas, equação reduzida, paralelismo, perpendicularismo.)

Observação: Em vários exercícios propostos, será necessário achar a equação reduzida de uma reta que passa por um ponto dado (conhecido) $P_0(x_0, y_0)$ e tem inclinação dada (conhecida) a . Para isso, o leitor sempre deve usar a equação obtida no exemplo 1: $y = y_0 + a(x - x_0)$.

1. Sendo as retas r e s dadas por:

$$r\{(x, y) = (4, 6) + t(-3, 5)$$

$$s\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

Pede-se:

- Ache as equações reduzidas das retas r e s .
- Verifique se elas são paralelas ou concorrentes.
- Se concorrentes, verifique se elas são perpendiculares, e ache o ponto de intersecção P_r .

Resposta:

$$a. \quad r\left\{y = -\frac{5}{3}x + \frac{38}{3}\right\} \quad s\left\{y = \frac{3}{5}x + 2\right\}$$

$$b. \quad a_1 = -\frac{5}{3}, a_2 = \frac{3}{5}; a_1 \neq a_2 \Rightarrow \text{as retas são concorrentes}$$

$$c. \quad a_1 \cdot a_2 = -1 \Rightarrow r \perp s; P_r\left(\frac{80}{17}, \frac{82}{17}\right)$$

2. Ache a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(2, -4)$.

Resposta: $y = -2x$

3. Ache a equação reduzida da reta s que passa pelo ponto $A(1, -3)$ e é paralela à reta $r\{y = 6x + 2005\}$.

Resposta: $y = 6x - 9$

4. Ache a equação reduzida da reta s que passa pelo ponto $A(2, 7)$, e é perpendicular à reta

$$r\left\{y = -\frac{x}{3} + 20.000\right\}.$$

Resposta: $y = 3x + 1$

5. Para quais valores de m e n as retas $r\{y = (m^2 - 2)x + 5\}$ e $s\{y = mx + n - 1\}$ são paralelas distintas?

Resposta: $m = -1$ ou $m = 2; n \neq 6$

6. Para que valores de k as retas $r\{y = (k - 2)x + 2005\}$ e $s\{y = (k + 2)x - 2005\}$ são perpendiculares?

Resposta: $k = -\sqrt{3}$ ou $k = \sqrt{3}$

7. Dadas as retas $r\{y = -2x - 3\}$ e $s\{y = -2x + 12\}$, ache a equação reduzida da reta s' , simétrica da reta s em relação à reta r .

Resposta: $y = -2x + 27$

8. Considere a reta

$$r\left\{y = -\frac{3}{2}x + 3\right\}$$

e sejam A e B , respectivamente, os pontos em que r corta os eixos Ox e Oy . Calcule a área A do triângulo OAB .

Resposta: $A = 3$ (unidades de área)

9. Considere o feixe de retas paralelas

$$r_b \left\{ y = -\frac{4}{5}x + b \right.$$

e para cada $b > 0$ seja A_b a área da região do primeiro quadrante do plano Oxy , limitada pela reta r_b e pelos semi-eixos positivos Ox e Oy . Calcule b para que $A_b = 10$ (unidades de área).

Resposta: $b = 4$.

Noções de geometria analítica no espaço

Preâmbulo

Assim como no Apêndice 2 partimos da suposição de que cada ser humano razoavelmente articulado tem uma noção intuitiva dos conceitos de *ponto*, *reta* e *plano* (embora ali não tenhamos explicitado isso), vamos supor o mesmo em relação ao conceito *espaço*. Também admitiremos a compreensão intuitiva da *tridimensionalidade** do espaço, prescindindo dos aspectos filosóficos do conceito “dimensão”.

Observações introdutórias

1. Denotaremos os pontos do espaço tridimensional por *letras latinas maiúsculas*.
2. Dados dois pontos A e B do espaço, definimos a **distância euclidiana**** entre eles como o *comprimento* do segmento de reta AB . A notação para a distância euclidiana entre os pontos A e B é: $d(A, B)$. Se A e B coincidem, por definição, $d(A, B) = 0$.
3. Denominamos o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, munido com a distância euclidiana, **espaço euclidiano**, e o denotamos por $\mathbb{E}^3$.

A3.1 Vetores

Iniciamos este tópico convidando o leitor para uma releitura da Seção A2.1.1, Apêndice 2, apenas com a substituição das condições: “pontos A e B pertencentes a um plano” e “segmento orientado AB em um plano”, respectivamente por: “pontos A e B pertencentes ao espaço $\mathbb{E}^3$ ” e “segmento orientado AB contido no espaço $\mathbb{E}^3$ ”.

A menos dessa substituição, toda a conceituação, terminologia e nomenclatura relativa a vetores permanecem as mesmas da Seção A2.1.1, Apêndice 2. Só reenunciamos a definição de vetor, com a modificação pertinente, para fixá-la melhor.

Definição Vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados contidos no espaço $\mathbb{E}^3$, que têm a mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento que o segmento orientado AB .

*Três dimensões.

**De Euclides, filósofo e matemático grego, criador da geometria plana.

A terminologia ao final da Seção A2.1.1, Apêndice 2, fica:

“O conjunto dos vetores definidos a partir de segmentos orientados do espaço $\mathbb{E}^3$ é denominado *espaço vetorial* e é denotado por $\mathbb{R}^3$.”

As Seções A2.1.2, Operações com vetores; A2.1.3, Vetores paralelos; A2.1.4, Vetores ortogonais, também permanecem inalteradas. Remetemos o esforçado leitor à releitura.

Somente a partir da Seção A2.1.5 haverá modificações, das quais trataremos a seguir.

A3.2 Sistema de coordenadas cartesianas no espaço $\mathbb{E}^3$

Uma dificuldade capital no estudo da geometria analítica no espaço $\mathbb{E}^3$ é que os entes geométricos em questão, localizados no espaço tridimensional, precisam ser representados em um plano (duas dimensões). Assim, surgem elementos de posição espacial, perspectiva, grandeza aparente etc., exigindo do leitor um maior esforço para a compreensão. Tendo isso em vista, vamos erigir um sistema de coordenadas no espaço, para localizar entidades geométricas, voltando ao sistema de coordenadas cartesianas no plano, e, daí, “ir para o espaço” (no bom sentido do termo).

Com esse intuito, solicitamos ao leitor que se reporte ao sistema cartesiano representado na figura da Seção A2.1.5, Plano cartesiano, Apêndice 2.

Postemo-nos sobre o plano Oxy , supondo que ele é uma espécie de “chão” (um solo plano).

Imaginemos agora um *terceiro eixo orientado*, similar a Ox e Oy , passando pela origem O e perpendicular a Ox e Oy (ou perpendicular ao plano horizontal Oxy – o “chão”). Orientemos esse eixo “para cima”, e, por convenção, a origem O pertencente a ele corresponde ao número real zero; acima da origem representamos números reais positivos (maiores que zero); abaixo da origem representamos números reais negativos (menores que zero). Denominamos esse eixo *eixo das cotas*, e o denotamos por Oz .

Com essa construção, obtemos um sistema constituído por três eixos mutuamente perpendiculares, passando pela origem O , e também três planos, dois a dois perpendiculares, denotados por Oxy , Oxz , Oyz , tal que Oxy e Oxz se interceptam segundo o eixo Ox ; Oxy e Oyz se interceptam segundo o eixo Oy ; Oxz e Oyz se interceptam segundo o eixo Oz ; a intersecção comum aos três planos é a origem O .

Designamos o eixo Oz como *eixo vertical*, o plano Oxy como *plano horizontal* e os planos Oxz e Oyz como *planos verticais*.

O sistema $Oxyz$ é denominado *sistema ortogonal (ou cartesiano)* de coordenadas no espaço $\mathbb{E}^3$, e vamos na sequência mostrar como determinar a *posição* de um ponto P do espaço $\mathbb{E}^3$ em relação a $Oxyz$. Em virtude da maior complexidade da construção, iniciamos com uma representação geométrica (Figura A3.1), que de certo modo “condensa” espacialmente o processo construtivo, e *depois* o descrevemos temporalmente. Solicitamos ao esforçado leitor que alterne a abstração descritiva temporal com a concretude visual espacial, para melhor compreensão do exposto.

Por P traçamos uma reta paralela ao eixo Oz (a qual também é perpendicular ao plano Oxy). Ela fura o plano Oxy em um *único ponto* P' , denominado *projeção ortogonal* do ponto P sobre o plano Oxy (ou, também, *pé da perpendicular* baixada de P sobre o plano Oxy).

As coordenadas do ponto P' em relação a Oxy são, respectivamente, a *primeira* (x é a abscissa) e a *segunda* (y é a ordenada) *coordenadas do ponto* P em relação a $Oxyz$.

Por P baixamos a *perpendicular ao eixo* Oz (que é paralela ao segmento $P'O$). O seu pé é o ponto do eixo Oz cuja distância (com sinal) à origem O é indicada por z . Temos que: $z > 0$, se P está acima do plano Oxy ; $z < 0$, se P está abaixo do plano Oxy . A *terceira* coordenada do ponto P em relação ao sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ é z , denominada *cota*, ou, *altura* (com sinal) do ponto P .

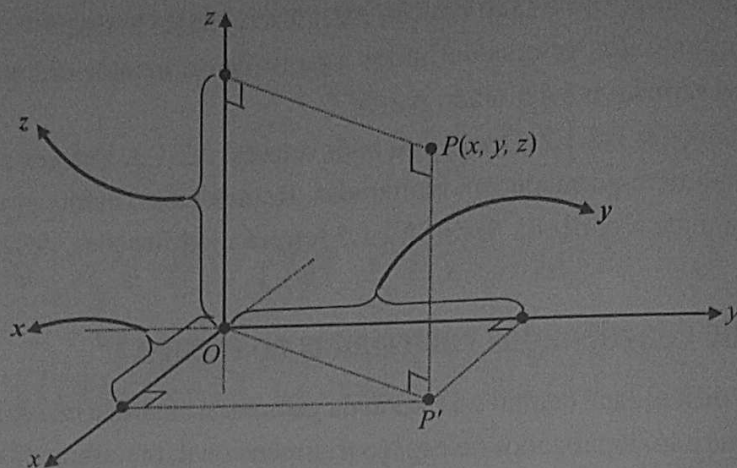


Figura A3.1

Denotamos $P(x, y, z)$, e denominamos x, y, z as *coordenadas cartesianas do ponto P* em relação ao sistema $Oxyz$.

O elemento (x, y, z) é denominado um *trio ordenado de números reais*.

Com essa construção, concluímos que a cada ponto $P \in \mathbb{E}^3$ corresponde *um único* trio ordenado de números reais em relação a um sistema fixado de coordenadas cartesianas $Oxyz$.

Reciprocamente, fixado um sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ do Espaço $\mathbb{E}^3$, e dado um trio ordenado de números reais (x, y, z) , existe *um único ponto* $P \in \mathbb{E}^3$ que tem como coordenadas x, y, z . A construção para mostrar isso é, de certo modo, a “inversa” da que apresentamos anteriormente, e convidamos o EL* a realizá-la, a título de exercício.

Resumindo: Fixado um sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ em $\mathbb{E}^3$, constata-se que existe uma *correspondência biunívoca* (um-a-um) entre cada ponto P do espaço $\mathbb{E}^3$ e cada trio ordenado de números reais (x, y, z) .

Na Figura A3.2, representamos alguns pontos com coordenadas numéricas dadas (números dados), lembrando ao leitor que estamos representando, por meio de uma figura plana, uma situação cuja realidade é espacial.

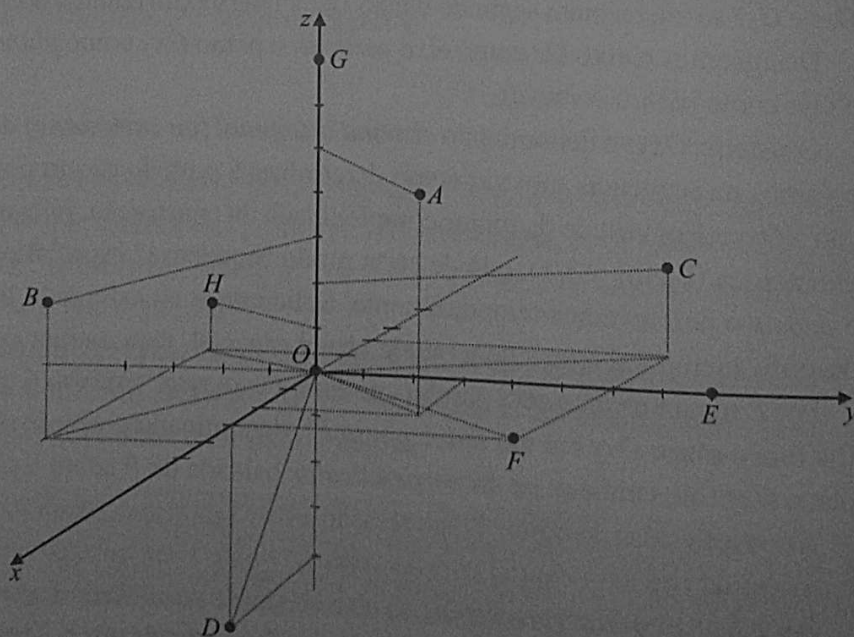


Figura A3.2

*Esforçado leitor.

$O(0, 0, 0)$ $A(2, 3, 5)$ $B(4, -3, 3)$ $C(-2, 6, 2)$ $D(3, 0, -4)$
 $E(0, 8, 0)$ $F(3, 6, 0)$ $G(0, 0, 7)$ $H(-1, -3, 1)$
 Solicitamos ao EL determinar onde estão os pontos indicados a seguir:

1. $L(x, y, 0)$ 2. $M(x, 0, z)$ 3. $N(0, y, z)$ 4. $P(x, 0, 0)$ 5. $Q(0, y, 0)$ 6. $R(0, 0, z)$
 Respostas: 1. Plano Oxy 2. Plano Oxz 3. Plano Oyz 4. Eixo Ox
 5. Eixo Oy 6. Eixo Oz

A3.3 Bases ortonormais

A3.3.1 Bases ortonormais – coordenadas

Nesta seção, faremos uma “ampliação espacial” do conteúdo pertinente às Seções A2.1.6, A2.1.7 e A2.1.8, Apêndice 2. Por isso, muito da terminologia, nomenclatura e definições soará familiar ao leitor, mas, por outro lado, não podemos esquecer que agora “estamos no espaço”, e, devido a essa circunstância, muito de novo será acrescentado.

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, constituído pelos vetores definidos a partir de segmentos orientados do espaço $\mathbb{E}^3$, e fixemos um sistema ortogonal (cartesiano) de coordenadas $Oxyz$, em $\mathbb{E}^3$ (conforme a Seção A3.2, Apêndice 3). Dado um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, existe um *único* representante de $\mathbf{u}$ cujo início coincide com a origem O do sistema $Oxyz$, e cujo fim coincide com um *único* ponto $P \in \mathbb{E}^3$. O vetor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ é denominado *vetor posição* do ponto P em relação ao sistema cartesiano $Oxyz$.

Vamos agora ampliar, de modo bastante natural, o conceito de *base ortonormal do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$, obtendo assim o conceito correspondente em $\mathbb{R}^3$.

Para isso, consideremos, em $\mathbb{E}^3$, os pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, e denotemos os respectivos vetores posição por:

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{j} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{k} = \overrightarrow{OC}.$$

Verifica-se facilmente que esses vetores satisfazem as condições:

(i) $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$

Dizemos que estão *normalizados*, ou também que são vetores *unitários* ou *versores*, e denominamo-los, respectivamente, *versor do eixo Ox* ($\mathbf{i}$), *versor do eixo Oy* ($\mathbf{j}$), *versor do eixo Oz* ($\mathbf{k}$).

(ii) $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}, \mathbf{j} \perp \mathbf{k}, \mathbf{i} \perp \mathbf{k}$ (são, dois a dois, *ortogonais*). (Ver Figura A3.3.)

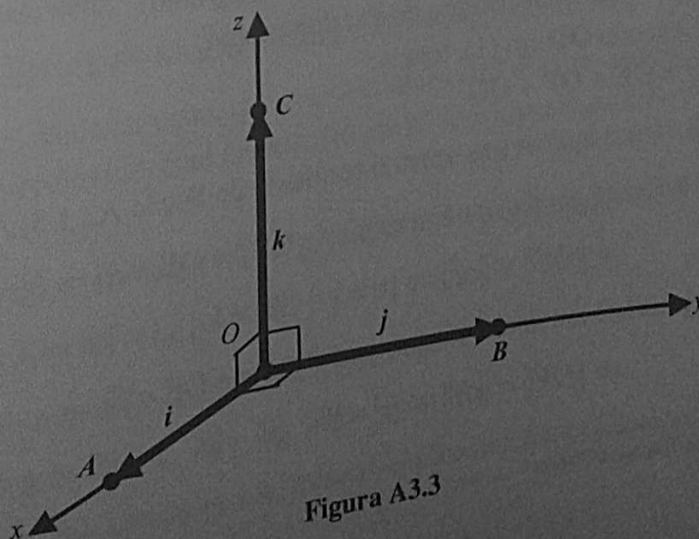


Figura A3.3

O leitor esforçado e sagaz já deve estar adivinhando o nosso desígnio: queremos mostrar que, para cada vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, existem *únicos* números reais x, y, z , tal que $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e assim caracterizar o conjunto $C = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ como *base ortonormal* do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, em correspondência com o já exposto na Seção 6 do Apêndice 2 (*base ortonormal* do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$).

Isso posto, seja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, e consideremos o vetor posição correspondente $\mathbf{u} = \mathbf{OP}$ em relação ao nosso sistema cartesiano fixado. Denotando as coordenadas cartesianas do ponto P (que são *únicas*) por x, y, z , escrevemos: $P(x, y, z)$.

Assim como na Seção anterior, *primeiramente* apresentaremos, por meio da Figura A3.4, uma representação geométrica que, de certo modo, é uma “condensação visual espacial” da sucessão de raciocínios exposta logo *depois*, e novamente solicitamos ao LES* a alternância entre a abstratidade temporal descritiva e a concretude espacial visual.

Para simplificar o trabalho representacional, vamos considerar as coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ positivas (maiores que zero), mas, com pequenas adaptações, a sequência de raciocínios vale para todas as possibilidades.

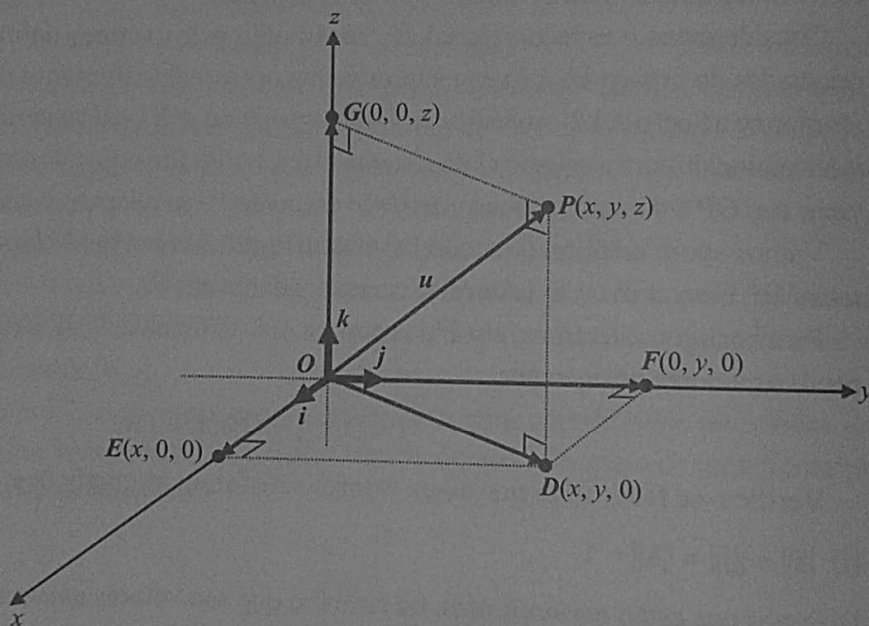


Figura A3.4

(1) $\mathbf{u} = \mathbf{OP} = \mathbf{OD} + \mathbf{OG}$ (Regra do Paralelogramo)

(2) $\mathbf{OD} = \mathbf{OE} + \mathbf{OF}$ (Regra do Paralelogramo)

Levando $\mathbf{OD}$ em (1), temos:

(3) $\mathbf{u} = \mathbf{OE} + \mathbf{OF} + \mathbf{OG}$

Agora vamos aplicar três vezes o resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2 (Vetores paralelos):

$\mathbf{OE} \parallel \mathbf{i}$: Existe um *único* número real α tal que $\mathbf{OE} = \alpha\mathbf{i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\mathbf{OE}\| = \|\alpha\mathbf{i}\| \Rightarrow |x| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{i}\| = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha| \Rightarrow x = \alpha \quad (x > 0) \Rightarrow \mathbf{OE} = x\mathbf{i}$$

$\mathbf{OF} \parallel \mathbf{j}$: Existe um *único* número real β tal que $\mathbf{OF} = \beta\mathbf{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\mathbf{OF}\| = \|\beta\mathbf{j}\| \Rightarrow |y| = |\beta| \cdot \|\mathbf{j}\| = |\beta| \cdot 1 = |\beta| \Rightarrow y = \beta \quad (y > 0) \Rightarrow \mathbf{OF} = y\mathbf{j}$$

*Leitor esforçado e sagaz.

$OG \parallel k$: Existe um único número real γ tal que, $OG = \gamma k \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|OG\| = \|\gamma k\| \Rightarrow |z| = |\gamma| \cdot \|k\| = |\gamma| \cdot 1 = |\gamma| \Rightarrow z = \gamma \ (z > 0) \Rightarrow OG = zk$

Substituindo OE, OF, OG em (3), segue: $u = xi + yj + zk$.
 Denominamos o conjunto $C = \{i, j, k\}$ *base ortonormal** (base canônica) do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Se $u = xi + yj + zk$ é um vetor do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, denominamos os (únicos) números x, y, z , as *coordenadas* do vetor u em relação à base $C = \{i, j, k\}$.

Notação simplificada: A notação simplificada para " $u = xi + yj + zk$ " é:

$$"u = (x, y, z)"$$

Na notação simplificada, escrevemos: $i = (1, 0, 0); j = (0, 1, 0); k = (0, 0, 1)$

Observações:

1. Doravante, fica subentendido que qualquer vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ terá suas coordenadas referidas à *base canônica* $C = \{i, j, k\}$, e não mencionaremos mais isso.
2. É bem simples verificar a igualdade de vetores em termos de coordenadas.

De fato, consideremos os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Se $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$, obviamente $u = v$.

Reciprocamente, se $u = v$, ou seja, $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$, concluímos, pela *unicidade das coordenadas*, que $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

Resumindo: $u = v \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

A3.2 Norma de um vetor em termos de coordenadas

Proposição Seja $u = (x, y, z)$ um vetor. Então: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Demonstração: (Ver Figura A3.2.)

Sendo $u = OP$, então $\|u\| = \|OP\|$

Como $k \perp i$ e $k \perp j$, segue, da construção, que o quadrilátero $ODPG$ é um retângulo. Logo, o triângulo ODP é um triângulo-retângulo, com ângulo reto em D e hipotenusa OP . Aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DP}^2. \text{ Mas, } \overline{OP} = \|u\|, \text{ e } \overline{DP} = |z|; \text{ portanto: } \|u\|^2 = \overline{OD}^2 + z^2. \quad (1)$$

Sendo $i \perp j$, decorre, da construção, que o quadrilátero $OEDF$ é um retângulo, logo, o triângulo OED é um triângulo-retângulo, com ângulo reto em E , com hipotenusa OD . Aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{ED}^2. \text{ Mas, } \overline{OE} = |x|, \overline{ED} = \overline{OF} = |y|; \text{ portanto: } \overline{OD}^2 = x^2 + y^2. \quad (2)$$

Levando $\overline{OD}$ de (2) em (1), vem:

$$\|u\|^2 = x^2 + y^2 + z^2. \text{ Extraíndo a raiz quadrada positiva:}$$

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

*"orto": os vetores i, j, k são, dois a dois, *ortogonais*; "normal": os vetores i, j, k são *normalizados* (têm norma igual a 1 – são *versores* ou *vetores unitários*).

EXEMPLO

Aplicando a fórmula anterior, calcule a norma de cada vetor dado

a. $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$ b. $\mathbf{v} = (-3, 0, 4)$ c. $\mathbf{w} = (-1, 2, 3)$

Solução

a. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = 3$

b. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = 5$

c. $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \Rightarrow \|\mathbf{w}\| = \sqrt{14}$

A3.3.3 Operações com vetores e paralelismo de vetores em termos de coordenadas**a. Adição de vetores**

Proposição: Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores.

Então: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Demonstração:

$\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ significa: $\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$

$\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ significa: $\mathbf{v} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$

Somando: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) + (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

b. Multiplicação de um número real por um vetor

Proposição: Sejam: α um número real e $\mathbf{u} = (x, y, z)$ um vetor.

Então: $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

Demonstração:

$\mathbf{u} = (x, y, z)$ significa: $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Segue que: $\alpha\mathbf{u} = \alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\alpha x)\mathbf{i} + (\alpha y)\mathbf{j} + (\alpha z)\mathbf{k} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

c. Paralelismo de vetores em termos de coordenadas

O resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2 (Paralelismo de vetores), nos fornece um critério para determinar se dois vetores são paralelos ou não, em termos de coordenadas.

De fato, sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores não-nulos.

Pelo resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2, temos:

$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow$ existe um único número real α tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = \alpha(x_2, y_2, z_2) = (\alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_2, \alpha \cdot z_2)$ (**Proposição anterior**) $\Leftrightarrow x_1 = \alpha \cdot x_2, y_1 = \alpha \cdot y_2, z_1 = \alpha \cdot z_2$

Resumindo: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow x_1 = \alpha \cdot x_2, y_1 = \alpha \cdot y_2, z_1 = \alpha \cdot z_2$

Dizemos então que as coordenadas correspondentes são *proporcionais*.
Se, em particular, por exemplo, x_1, y_1, z_1 são diferentes de 0, podemos dividir cada equação anteriormente, por x_1, y_1, z_1 , respectivamente, obtendo:

$$\frac{x_1}{x_2} = \alpha, \quad \frac{y_1}{y_2} = \alpha, \quad \frac{z_1}{z_2} = \alpha, \text{ e escrevemos:}$$

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

EXEMPLOS

1. Dados os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v} = (0, 3, -2)$, $\mathbf{w} = (-5, 1, 6)$
Calcule:

- a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; b. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$; c. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$; d. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$; e. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$; f. $3\mathbf{u} - 2\mathbf{w}$,
g. $\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$; h. $4\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$.

Solução

- a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, -1, 4) + (0, 3, -2) = (2 + 0, -1 + 3, 4 + (-2)) =$
 $= (2 + 0, -1 + 3, 4 - 2) = (2, 2, 2) \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 2, 2)$
- b. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (0, 3, -2) + (-5, 1, 6) = (0 + (-5), 3 + 1, -2 + 6) =$
 $= (0 - 5, 3 + 1, -2 + 6) = (-5, 4, 4) \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} = (-5, 4, 4)$
- c. $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (2, 2, 2) + (-5, 1, 6) = (2 + (-5), 2 + 1, 2 + 6) =$
 $= (2 - 5, 2 + 1, 2 + 6) = (-3, 3, 8) \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (-3, 3, 8)$
- d. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (2, -1, 4) - (0, 3, -2) = (2 - 0, -1 - 3, 4 - (-2)) =$
 $= (2 - 0, -1 - 3, 4 + 2) = (2, -4, 6) \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = (2, -4, 6)$
- e. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(2, -1, 4) + 3(0, 3, -2) =$
 $= (2 \cdot 2, 2 \cdot (-1), 2 \cdot 4) + (3 \cdot 0, 3 \cdot 3, 3 \cdot (-2)) = (4, -2, 8) + (0, 9, -6) =$
 $= (4 + 0, -2 + 9, 8 + (-6)) = (4 + 0, -2 + 9, 8 - 6) = (4, 7, 2) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (4, 7, 2)$
- f. $3\mathbf{u} - 2\mathbf{w} = 3(2, -1, 4) - 2(-5, 1, 6) =$
 $= (3 \cdot 2, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 4) - (2 \cdot (-5), 2 \cdot 1, 2 \cdot 6) =$
 $= (6, -3, 12) - (-10, 2, 12) = (6 - (-10), -3 - 2, 12 - 12) =$
 $= (6 + 10, -3 - 2, 12 - 12) = (16, -5, 0) \Rightarrow 3\mathbf{u} - 2\mathbf{w} = (16, -5, 0)$
- g. $\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w} = (2, -1, 4) - 4(0, 3, -2) + 5(-5, 1, 6) =$
 $= (2, -1, 4) - (4 \cdot 0, 4 \cdot 3, 4 \cdot (-2)) + (5 \cdot (-5), 5 \cdot 1, 5 \cdot 6) =$
 $= (2, -1, 4) - (0, 12, -8) + (-25, 5, 30) =$
 $= (2 - 0 + (-25), -1 - 12 + 5, 4 - (-8) + 30) =$
 $= (2 - 0 - 25, -1 - 12 + 5, 4 + 8 + 30) =$
 $= (-23, -8, 42) \Rightarrow \mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 5\mathbf{w} = (-23, -8, 42)$
- h. $4\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = 4(2, -1, 4) + 2(0, 3, -2) - 3(-5, 1, 6) =$
 $= (4 \cdot 2, 4 \cdot (-1), 4 \cdot 4) + (2 \cdot 0, 2 \cdot 3, 2 \cdot (-2)) - (3 \cdot (-5), 3 \cdot 1, 3 \cdot 6) =$
 $= (8, -4, 16) + (0, 6, -4) - (-15, 3, 18) =$
 $= (8 + 0 - (-15), -4 + 6 - 3, 16 + (-4) - 18) =$
 $= (8 + 0 + 15, -4 + 6 - 3, 16 - 4 - 18) = (23, -1, -6) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = (23, -1, -6)$

2. Verifique, em cada caso dado, se os vetores são ou não paralelos.

(Seção A3.3.3 c)

- a. $\mathbf{u} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (2, -4, 6)$
 b. $\mathbf{r} = (5, -2, 3)$, $\mathbf{s} = (20, -8, 7)$
 c. $\mathbf{m} = (6, 2, 10)$, $\mathbf{n} = (3, 1, 0)$
 d. $\mathbf{p} = (-2, 0, 3)$, $\mathbf{q} = (0, 5, 6)$
 e. $\mathbf{w} = (3, -5, 0)$, $\mathbf{z} = (-12, 20, 0)$
 f. $\mathbf{l} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{t} = (2, 0, 1)$

Solução

- a. Dividindo as coordenadas correspondentes (por exemplo, as de $\mathbf{v}$ pelas de $\mathbf{u}$):

$$\frac{2}{-1} = -2, \quad \frac{-4}{2} = -2, \quad \frac{6}{-3} = -2 \Rightarrow \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} \Rightarrow \mathbf{u} // \mathbf{v}$$

- b. Idem (por exemplo, as de $\mathbf{r}$ pelas de $\mathbf{s}$):

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}, \quad \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{5}{20} = \frac{-2}{-8} \neq \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ não são paralelos

- c. Aqui, temos que dividir as coordenadas do vetor $\mathbf{n}$ pelas coordenadas do vetor $\mathbf{m}$ (pois não existe divisão por zero!):

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{0}{10} = 0 \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{m} \text{ e } \mathbf{n} \text{ não são paralelos}$$

- d. Aqui, não podemos dividir as coordenadas correspondentes em nenhuma ordem; usamos o resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2 Paralelismo de vetores):

Por exemplo, verifiquemos se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{q}$:

$(-2, 0, 3) = \alpha(0, 5, 6) = (\alpha \cdot 0, 5\alpha, 6\alpha)$. Basta igualar as primeiras coordenadas: $-2 = \alpha \cdot 0$. Essa igualdade não é verificada para nenhum valor real de α , pois para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot 0 = 0 \neq -2$. Logo, não existe α real tal que $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{q}$.

De modo análogo, também verificamos que não existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{q} = \beta \mathbf{p}$. (Verifique, EL*!)

- e. Aqui, temos coordenadas correspondentes nulas (terceira coordenada).
 Dividimos as coordenadas correspondentes não-nulas:

$$\frac{-12}{3} = -4, \quad \frac{20}{-5} = -4 \Rightarrow \frac{-12}{3} = \frac{20}{-5} = -4$$

Se multiplicamos $\mathbf{w}$ por -4 , vem:

$$-4\mathbf{w} = -4(3, -5, 0) = ((-4) \cdot 3, (-4) \cdot (-5), (-4) \cdot 0) = (-12, 20, 0) = \mathbf{z}$$

$$\Rightarrow \mathbf{z} = -4\mathbf{w} \Rightarrow \mathbf{z} // \mathbf{w}$$

- f. Mesma situação do exemplo e. Dividindo as coordenadas correspondentes não-nulas:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \neq 3 \Rightarrow \mathbf{l} \text{ e } \mathbf{t} \text{ não são paralelos}$$

3. Calcule k para que os vetores $\mathbf{u} = (k, 1, k-1)$ e $\mathbf{v} = (2, k+1, 3)$ sejam paralelos.

Solução

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{3}$$

Disso segue:

$$(1) \quad \frac{k}{2} = \frac{1}{k+1}$$

Resolvendo: $k(k+1) = 2 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2, k = 1$. (Solicitamos ao Esforçado Leitor que confira as respostas, resolvendo a equação do 2º grau.)

$$(2) \quad \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{3}$$

Resolvendo: $(k+1)(k-1) = 3 \Leftrightarrow k^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = -2, k = 2$

$$(3) \quad \frac{k}{2} = \frac{k-1}{3}$$

Resolvendo: $3k = 2k - 2 \Leftrightarrow 3k - 2k = -2 \Leftrightarrow k = -2$

O valor de k comum às equações (1), (2), (3) é a solução: $k = -2$

4. Calcule m e n para que os vetores $\mathbf{u} = (2m, 3m-2n, 12)$ e $\mathbf{v} = (3, 2, 3)$ sejam paralelos.

Solução

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{2m}{3} = \frac{3m-2n}{2} = \frac{12}{3} (=4)$$

$$(1) \quad \frac{2m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 6$$

$$(2) \quad \frac{3m-2n}{2} = 4. \text{ Levando } m = 6 \text{ em (2): } \frac{3 \cdot 6 - 2n}{2} = 4 \Leftrightarrow 18 - 2n = 8 \Leftrightarrow n = 5. \text{ Portanto: } m = 6, n = 5.$$

5. Determine o vetor $\mathbf{u}$, sabendo que:

a. $\mathbf{u}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{w} = (2, -1, 2)$

b. $\|\mathbf{u}\| = 21$

Solução

a. $\mathbf{u} // \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha \mathbf{w} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha(2, -1, 2)$.

b. $\|\mathbf{u}\| = 21 \Leftrightarrow \|\alpha(2, -1, 2)\| = 21 \Leftrightarrow |\alpha| \cdot \|(2, -1, 2)\| = 21$

Mas:

$$\|(2, -1, 2)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

Logo: $3|\alpha| = 21 \Leftrightarrow |\alpha| = 7 \Leftrightarrow \alpha = -7, \alpha = 7$

Levando cada valor calculado de α em $\mathbf{u} = \alpha(2, -1, 2)$, vem:

$$\alpha = -7 \Rightarrow \mathbf{u} = (-14, 7, -14)$$

$$\alpha = 7 \Rightarrow \mathbf{u} = (14, -7, 14)$$

A3.4 Produto escalar

No Apêndice 2, Seção A2.1.11, procuramos conceituar o Produto Escalar de vetores de modo mais geométrico, por comparação com projeções ortogonais de segmentos de reta sobre retas. Depois, mostramos que nossa definição de Produto Escalar era equivalente à definição algébrica usual do Produto Escalar para vetores do $\mathbb{R}^2$.

Ocorre que a abordagem geométrica do Produto Escalar para vetores do $\mathbb{R}^3$ é bastante difícil; por isso, vamos definir esse produto de modo usual (algebricamente). Solicitamos ao leitor que compare a definição dada a seguir com a Proposição 1.11.4 do Apêndice 2.

A3.4.1 Definição de produto escalar

Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Definição O *produto escalar* de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotado por: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (leia: “ $\mathbf{u}$ escalar $\mathbf{v}$ ”), é o *número real*:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2^*$$

A partir dessa definição, obtemos as seis propriedades do produto escalar, já enunciadas e demonstradas no Apêndice 2. Vamos lembrá-las, e acrescentar, como uma sétima propriedade, a nossa definição inicial do produto escalar (dada no Apêndice 2).

A3.4.2 Propriedades do produto escalar

Para quaisquer vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3)$ pertencentes ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, e quaisquer números reais α e β , valem as propriedades:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $(\alpha\mathbf{u}) \cdot (\beta\mathbf{v}) = (\alpha \cdot \beta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, ou, equivalentemente, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$
6. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem *ambos não-nulos*, então: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
7. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ forem *ambos não-nulos*, então:
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$, sendo $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
 (Para a definição do ângulo θ , ver Apêndice 2, Seção 1.10.)

EXEMPLOS

Observação: Para evitar prolixidades, vamos prescindir de exemplos e exercícios concernentes *exclusivamente* às propriedades do Produto Escalar, posto que já os exploramos suficientemente no Apêndice 2, e tudo permanece igual. Abordaremos exemplos envolvendo propriedades e a definição do produto escalar em termos de coordenadas, que é o diferencial em relação a vetores do $\mathbb{R}^2$.

1. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, sendo:

a. $\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, -5, 2)$

*Em palavras: O produto escalar de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é a soma dos produtos das coordenadas correspondentes.

- b. $\mathbf{u} = (5, -2, 6)$, $\mathbf{v} = (1, -3, -1)$
 c. $\mathbf{u} = (7, 0, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 9, 0)$
 d. $\mathbf{u} = (2, -3, 8)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 1)$

Solução (definição do produto escalar)

- a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = -4 - 10 + 6 = -8 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -8$
 b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) = 5 + 6 - 6 = 5 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$
 c. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + (-3) \cdot 0 = 14 + 0 + 0 = 14 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 14$
 d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 4 - 12 + 8 = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

2. Calcule k para que os vetores $\mathbf{w} = (k, 2, -3)$ e $\mathbf{z} = (3, k+1, 9)$ sejam ortogonais.

Solução (Propriedade 6)

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = 0$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = k \cdot 3 + 2 \cdot (k+1) + (-3) \cdot 9 = 3k + 2k + 2 - 27 = 5k - 25 = 0 \Leftrightarrow k = 5$$

3. Dados os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (3, 4, 0)$, calcule:

- a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ b. $\|\mathbf{u}\|$ c. $\|\mathbf{v}\|$ d. $\cos \theta$, $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Solução

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 6 - 4 + 0 = 2 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$

b. Proposição A3.3.2:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = 3$$

c. Proposição A3.3.2:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = 5$$

d. Propriedade 7:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta \Rightarrow 2 = 3 \cdot 5 \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{15}$$

4. Determine $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, sabendo que:

- a. $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$;
 b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -18$, sendo $\mathbf{w} = (3, -2, 1)$.

Solução

a. Pelo resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2:

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha(-1, 2, 1) \Leftrightarrow \mathbf{u} = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) \quad (1)$$

b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3\alpha - 4\alpha + \alpha = -6\alpha$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -18 \Rightarrow -6\alpha = -18 \Rightarrow \alpha = 3$$

Levando $\alpha = 3$ em (1), vem: $\mathbf{u} = (-3, 6, 3)$

5. Determine $\mathbf{u} = (x, y, z)$, sabendo que:

- a. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v} = (1, -2, 0)$
- b. $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, sendo $\mathbf{w} = (2, -1, 3)$
- c. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 27$, sendo $\mathbf{t} = (-3, 2, 5)$

Solução

- a. Propriedade 6: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot (-2) + z \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$ (i)
- b. Idem: $\mathbf{u} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow x \cdot 2 + y \cdot (-1) + z \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3z = 0$ (ii)
- c. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 27 \Leftrightarrow x \cdot (-3) + y \cdot 2 + z \cdot 5 = 27 \Leftrightarrow -3x + 2y + 5z = 27$ (iii)

De (i): $x = 2y$

Levando $x = 2y$ em (ii): $2 \cdot 2y - y + 3z = 0 \Leftrightarrow 4y - y + 3z = 0 \Leftrightarrow 3y + 3z = 0 \Leftrightarrow z = -y$

Levando $x = 2y$ e $z = -y$ em (iii):

$$(-3) \cdot 2y + 2y + 5 \cdot (-y) = 27 \Leftrightarrow -6y + 2y - 5y = 27 \Leftrightarrow -9y = 27 \Leftrightarrow y = -3$$

Levando $y = -3$ em $x = 2y$: $x = -6$

Levando $y = -3$ em $z = -y$: $z = 3$

Portanto, $\mathbf{u} = (-6, -3, 3)$

6. Determine $\mathbf{u} = (x, y, z)$, sabendo que:

- a. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$
- b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2$, sendo $\mathbf{w} = (1, -2, -1)$
- c. $\|\mathbf{u}\| = 7$

Solução

- a. Propriedade 6: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow x \cdot 0 + y \cdot 2 + z \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0$ (i)
- b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \Leftrightarrow x \cdot 1 + y \cdot (-2) + z \cdot (-1) = 2 \Leftrightarrow x - 2y - z = 2$ (ii)
- c. $\|\mathbf{u}\| = 7$:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 7$$

Quadrando a equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ (iii)

De (i): $z = -2y$. Levando $z = -2y$ em (ii):

$$x - 2y - (-2y) = 2 \Leftrightarrow x - 2y + 2y = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Levando $z = -2y$ e $x = 2$ em (iii):

$$\Leftrightarrow y = 3, y = -3$$

$$y = 3 \text{ em } z = -2y \Rightarrow z = -6 \Rightarrow \mathbf{u} = (2, 3, -6)$$

$$y = -3 \text{ em } z = -2y \Rightarrow z = 6 \Rightarrow \mathbf{u} = (2, -3, 6)$$

A operação que apresentaremos a seguir só é definida no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

A3.5 Produto vetorial

A3.5.1 Definição de produto vetorial

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores pertencentes ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Definição O produto vetorial de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (nessa ordem), denotado por: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (leia: “ $\mathbf{u}$ vetorial $\mathbf{v}$ ”), é o vetor de $\mathbb{R}^3$ assim definido por:

1. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, então: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$
2. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, mas $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, então: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. Se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não são paralelos, então $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é definido assim:

a. Direção:

$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$)

b. Sentido:

O sentido de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é dado pela regra da mão esquerda:

Se o dedo médio da mão esquerda representa $\mathbf{u}$, e o indicador representa $\mathbf{v}$ (nessa ordem), então o polegar representa $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ *

c. Norma: $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta$, sendo $\theta = \text{âng}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ **

Na Figura A3.5, temos a representação geométrica de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, para o caso 3 da definição. Observe que a figura ilustra a direção e o sentido de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Observação: Conforme o Item (b) da definição, as correspondências assinaladas na figura se referem aos dedos da mão esquerda.

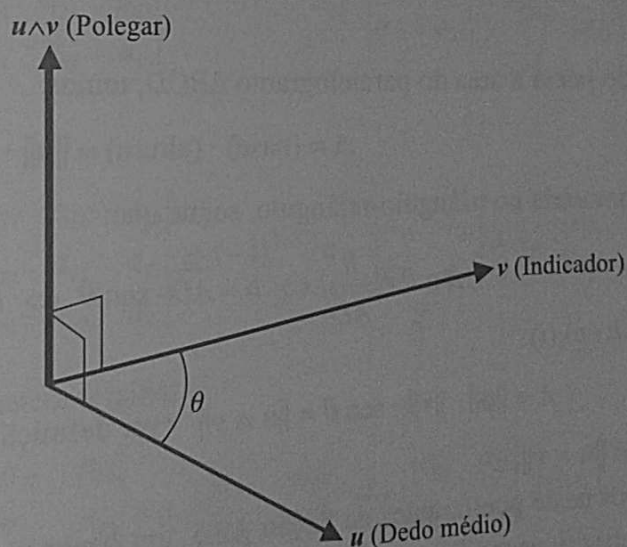


Figura A3.5

A3.5.2 Propriedades do produto vetorial

Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$; para quaisquer números reais α e β , valem as propriedades:

1. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ (anticomutativa)

*Uma regra equivalente a essa é a denominada *regra do parafuso*: se enroscamos um parafuso, girando-o no movimento de rotação que leva $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ (sentido horário), então a ponta do parafuso avança no sentido de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

**Note que, para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\sin \theta \geq 0$

2. $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ (distributiva)
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ (distributiva)
3. $(\alpha \mathbf{u}) \wedge (\beta \mathbf{v}) = (\alpha\beta)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$
4. Interpretação geométrica de $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|$ (no caso 3 da definição).

Se representamos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com a mesma origem e traçamos pela ponta do representante de cada vetor a reta paralela à direção do outro vetor, formamos um paralelogramo; então $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|$ é igual à área desse paralelogramo.

Deixamos as demonstrações das propriedades 1, 2 e 3 a cargo do EL*, usando para tal a fórmula do produto vetorial em termos das coordenadas dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, que apresentaremos na Seção A3.5.

Vamos provar a propriedade 4, pois os elementos a considerar são de simples compreensão (ver Figura A3.6)

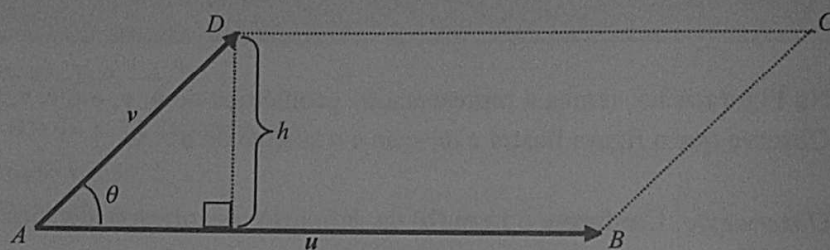


Figura A3.6

Denotando por A a área do paralelogramo $ABCD$, temos:

$$A = (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = \|\mathbf{u}\| \cdot h \quad (i)$$

Da trigonometria no triângulo-retângulo, segue que:

$$\sin \theta = \frac{h}{AD} \Leftrightarrow h = AD \cdot \sin \theta \Leftrightarrow h = \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta$$

Levando h em (i):

$$A = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| \quad (\text{ver definição de } \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| - \text{Item c})$$

Logo: $A = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|$

Apomos neste ponto, antes da Seção A3.5, um *lembrete rápido* sobre cálculo de determinantes de matrizes, especificamente, matrizes de ordem 2×2 e de ordem 3×3 . O conteúdo da Seção A3.5.3 torna necessário esse lembrete.

No nosso caso, a *regra de Laplace* para o cálculo do determinante é a mais apropriada (especificamente, desenvolvendo o cálculo segundo a *primeira linha* da matriz). A notação que usamos para o determinante é uma barra vertical de cada lado do quadro numérico que representa a matriz.

a. Matriz 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

*Esforçado leitor.

b. Matriz 3×3

Segundo a primeira linha:

Para cada elemento a_{1j} , multiplicamos $(-1)^{1+j} \cdot a_{1j}$ pelo determinante da matriz 2×2 , obtida eliminando a linha 1 e a coluna j da matriz original.

O determinante da matriz original é a soma algébrica dos três números. Veja o esquema seguinte:

Queremos calcular

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pela primeira linha:

Primeiro número:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Segundo número:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Terceiro número:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

E o determinante da matriz original é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Resolveremos exemplos numéricos no contexto da Seção A3.5.

A3.5.3 O produto vetorial em termos de coordenadas

Observação: A demonstração da proposição seguinte foge ao escopo deste escrito. Apenas enunciaremos a regra e mostraremos como aplicá-la.

Proposição

Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Então:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

(em notação completa)

ou

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

(em notação simplificada).

Um recurso mnemônico para trabalhar com essa fórmula é um *determinante simbólico* cuja primeira linha é formada pelos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; a segunda e terceira linhas são formadas respectivamente pelas coordenadas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (*nessa ordem*). Desenvolvendo esse determinante pela regra de Laplace, *segundo a primeira linha* (ver o Lembrete rápido, b), obtemos o produto vetorial na *notação completa*:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

EXEMPLOS

1. Sendo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, os vetores da base canônica, calcule:

- a. $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k}$
 b. (i) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$, (ii) $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$, (iii) $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$
 c. (i) $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}$, (ii) $\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}$, (iii) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}$

Solução

- a. Da definição de produto vetorial (Seção A3.5.2, Vetores paralelos) segue que: $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$
 b. Conforme a Seção A3.3.1, escrevemos, em notação simplificada:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Aplicamos a fórmula da Seção A3.5.3

$$(i) \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

$$(ii) \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = 1\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$(iii) \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = 0\mathbf{i} - (-1)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

A figura mnemônica seguinte ajuda na memorização

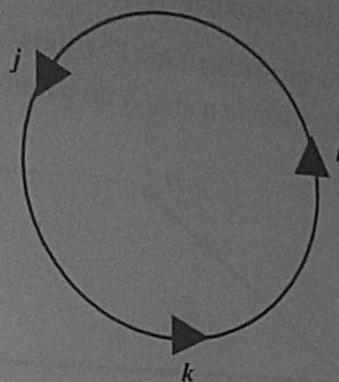


Figura A3.7

c. Da propriedade 1, segue:

$$(i) \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}, (ii) \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}, (iii) \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

(Na Figura A3.7, percorrer o círculo no sentido horário.)

2. Dados os vetores

$$\mathbf{u} = (1, 2, 3), \mathbf{v} = (2, -1, 1), \mathbf{w} = (4, 1, -2), \text{ calcule:}$$

$$a. \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad b. (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}, \quad c. \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \quad d. \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}), \quad e. \text{ O que podemos concluir?}$$

Solução

$$a. \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1))\mathbf{i} - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\mathbf{j} + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)\mathbf{k} =$$

$$= (2 + 3)\mathbf{i} - (1 - 6)\mathbf{j} + (-1 - 4)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (5, 5, -5)$$

$$b. (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (5 \cdot (-2) - (-5) \cdot 4)\mathbf{i} - (5 \cdot (-2) - (-5) \cdot 4)\mathbf{j} + (5 \cdot 1 - 5 \cdot 4)\mathbf{k} =$$

$$= (-10 + 20)\mathbf{i} - (-10 + 20)\mathbf{j} + (5 - 20)\mathbf{k} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k} \Rightarrow (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = (10, -10, -15)$$

$$c. \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = ((-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 1)\mathbf{i} - (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4)\mathbf{j} + (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 4)\mathbf{k} =$$

$$= (2 - 1)\mathbf{i} - (-4 - 4)\mathbf{j} + (2 + 4)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (1, 8, 6)$$

$$\text{d. } \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 8) \mathbf{i} - (1 \cdot 6 - 3 \cdot 1) \mathbf{j} + (1 \cdot 8 - 2 \cdot 1) \mathbf{k} = (12 - 24) \mathbf{i} - (6 - 3) \mathbf{j} + (8 - 2) \mathbf{k} = -12 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} + 6 \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (-12, -3, 6)$$

$$\text{e. } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

Concluimos que o produto vetorial *não* é associativo!

3. Na Figura A3.8, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, e são dados os vetores $\mathbf{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\mathbf{AD} = (3, -1, 4)$. Calcule a área A do paralelogramo.

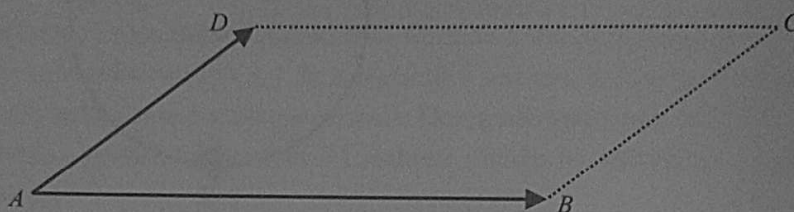


Figura A3.8

Solução

Pela propriedade 4 do produto vetorial: $A = \|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD}\|$

$$\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD} = (2 \cdot 4 - 1 \cdot (-1)) \mathbf{i} - ((-1) \cdot 4 - 1 \cdot 3) \mathbf{j} + ((-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 3) \mathbf{k} = (8 + 1) \mathbf{i} - (-4 - 3) \mathbf{j} + (1 - 6) \mathbf{k} = 9 \mathbf{i} + 7 \mathbf{j} - 5 \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD} = (9, 7, -5)$$

$$\|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD}\| = \sqrt{9^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{81 + 49 + 25} = \sqrt{155} \Rightarrow A = \sqrt{155} \text{ (unidade de área)}$$

4. No triângulo ABC da Figura A3.9, são dados os vetores $\mathbf{AB} = (-2, -1, 2)$ e $\mathbf{AC} = (1, 0, 1)$. Calcule:

- A área A do triângulo ABC .
- O comprimento h_c da altura relativa ao vértice C do triângulo ABC .

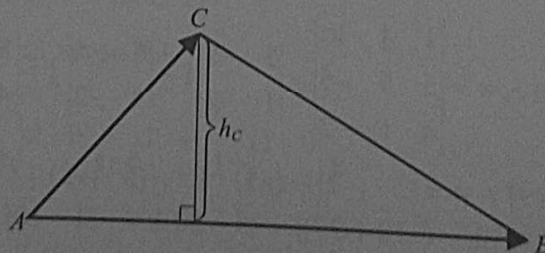


Figura A3.9

Solução

- Se traçamos, por C , a paralela ao segmento AB ; e por B , a paralela ao segmento AC , elas se encontram em um ponto D , e o quadrilátero formado é um paralelogramo $ABDC$. Deixamos a cargo do leitor sagaz e imaginativo a verificação de que os triângulos ABC e DCB são

congruentes; logo, a área A do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo $ABDC$. Essa última, pela propriedade 4 do produto vetorial, é dada por $\|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}\|$. E vem:

$$\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC} = (-1, 4, 1)$$

$$\|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Portanto: } A = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b. Da geometria elementar:

$$A = \frac{\overline{AB}}{2} \cdot h_c$$

Mas:

$$\overline{AB} = \|\mathbf{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \overline{AB} = 3$$

Do item a:

$$A = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo o valor da área do triângulo e do comprimento do segmento AB na fórmula anterior, temos:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot h_c}{2} \Rightarrow h_c = \sqrt{2}$$

5. Determine o vetor $\mathbf{w}$, sabendo que

- (i) $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$, sendo $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$
- (ii) $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$
- (iii) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = 24$, sendo $\mathbf{z} = (2, -1, 1)$.

Solução

Por (i) e (ii): $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$.

Sendo $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ (definição de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, item a), segue que, $\mathbf{w} \parallel \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Do Resultado da Seção A2.1.3 – Apêndice 2, existe um único número real α tal que $\mathbf{w} = \alpha (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$.

Calculando:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (3, -3, -3) \Rightarrow \mathbf{w} = \alpha(3, -3, -3)$$

De (iii): $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = 24$. Substituindo $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$:

$$[\alpha(3, -3, -3)] \cdot (2, -1, 1) = 24 \Rightarrow \alpha[(3, -3, -3) \cdot (2, -1, 1)] = 24 \Rightarrow \\ \alpha[3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-3) \cdot 1] = 24 \Rightarrow \alpha(6 + 3 - 3) = 24 \Rightarrow 6\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 4.$$

Levando $\alpha = 4$ em $\mathbf{w} = (3, -3, -3)$, vem: $\mathbf{w} = 4(3, -3, -3) \Rightarrow \mathbf{w} = (12, -12, -12)$.

6. Determine o vetor $\mathbf{w} = (x, y, z)$, sabendo que:

(i) $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = (-2, 8, -2)$, sendo $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$

(ii) $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, sendo $\mathbf{v} = (0, -5, 2)$

Solução

(i) $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = (-2, 8, -2) \Rightarrow$

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = -y\mathbf{i} - (-x - z)\mathbf{j} + (-y)\mathbf{k} = -y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} = (-y, x + z, -y) = (-2, 8, -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) -y = -2, (2) x + z = 8, (3) -y = -2$$

De (1) ou (3): $y = 2$

(ii) Pela Propriedade 6 do produto escalar:

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (0, -5, 2) = 0 \Leftrightarrow x \cdot 0 + y \cdot (-5) + z \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -5y + 2z = 0 \quad (4)$$

Levando $y = 2$ em (4), calculamos: $z = 5$

Levando $z = 5$ em (2), calculamos: $x = 3$.

Logo: $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$. ■

Na sequência do nosso escrito, apresentaremos uma aplicação dos vetores do $\mathbb{R}^3$ na geometria analítica espacial, de modo mais específico no estudo da *reta* e do *plano*, e no espaço teremos que solicitar um labor muitíssimo incrementado do LESI* do que no estudo do Apêndice 2.

Na Seção A3.6, vamos reenunciar algumas relações entre pontos e vetores (apresentadas no Apêndice 2 – Seção A2.2), bem como as notações pertinentes, com as ampliações necessárias. As Seções A3.7 e A3.8 serão dedicados, respectivamente, ao estudo da *reta* e do *plano*.

Terminologia

Denominaremos o espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$, munido com um sistema cartesiano $Oxyz$ fixado, *espaço cartesiano $Oxyz$* .

A3.6 Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ versus espaço cartesiano $Oxyz$

A3.6.1 Relação entre coordenadas de vetores e de pontos

Proposição 1 Sejam $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ pontos do espaço cartesiano $Oxyz$ e $\mathbf{AB}$ o vetor correspondente do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.
Então: $\mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

*Leitor esforçado, sagaz e imaginativo.

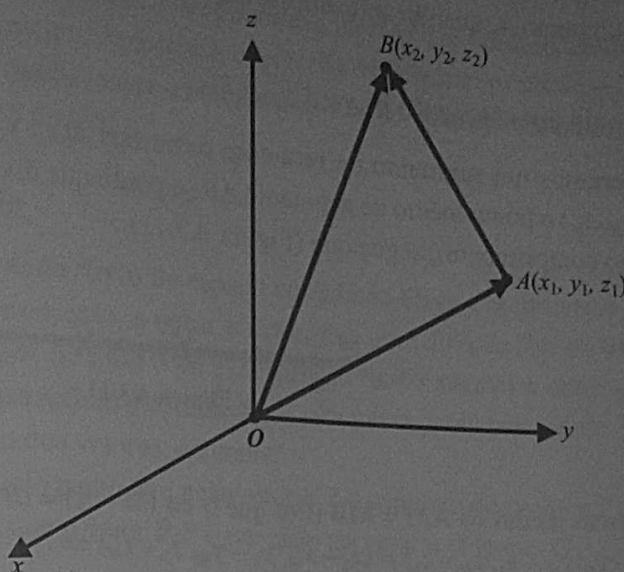


Figura A3.10

Observando a Figura A3.10, temos:

$A(x_1, y_1, z_1)$ significa: $\mathbf{OA} = (x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$ significa: $\mathbf{OB} = (x_2, y_2, z_2)$

Diferença de vetores: $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

A3.6.2 Notação de Grassmann

Notação de Grassmann para o vetor $\mathbf{AB}$:

$$\mathbf{AB} = (B - A)$$

A3.6.3 Soma de um ponto com um vetor

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ do espaço cartesiano $Oxyz$ e um vetor $\mathbf{u} = (l, m, n)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Se representamos o vetor $\mathbf{u}$ por um segmento orientado com origem no ponto A , a ponta desse segmento determina um *único* ponto B do espaço cartesiano $Oxyz$.

Designando esse ponto por $B(x_2, y_2, z_2)$, temos: $\mathbf{AB} = \mathbf{u}$, ou, na *notação de Grassmann*: $(B - A) = \mathbf{u}$. Escrevendo essa igualdade em termos de coordenadas, e usando a Proposição 1, segue que: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (l, m, n)$. Pela *unicidade* das coordenadas, temos: $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$, $z_2 - z_1 = n$, ou $x_2 = x_1 + l$, $y_2 = y_1 + m$, $z_2 = z_1 + n$; e podemos escrever o ponto B como: $B(x_1 + l, y_1 + m, z_1 + n)$. Concluimos que cada coordenada do ponto B é obtida somando a coordenada correspondente do ponto A com a coordenada correspondente do vetor $\mathbf{u}$. Isso sugere a seguinte *notação*, que será muito útil nas Seções A3.7 e A3.8:

$$B = A + \mathbf{u}$$

Dizemos que o ponto B é a soma do ponto A com o vetor $\mathbf{u}$, ou também, que o ponto B é o *translado* do ponto A , quando aplicamos a esse último o vetor $\mathbf{u}$.

A3.6.4 Ponto médio de um segmento de reta

Consideremos um segmento de reta com extremos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$. Denominando $M(x_M, y_M, z_M)$ o ponto médio do segmento AB (o ponto que divide o segmento em duas partes com o mesmo comprimento), segue que (Figura A3.11):

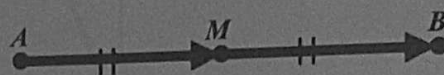


Figura A3.11

M é o ponto médio $\Leftrightarrow \mathbf{AM} = \mathbf{MB}$ (Por quê?) $\Leftrightarrow (M - A) = (B - M) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_M - x_1, y_M - y_1, z_M - z_1) = (x_2 - x_M, y_2 - y_M, z_2 - z_M) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M - x_1 = x_2 - x_M, y_M - y_1 = y_2 - y_M, z_M - z_1 = z_2 - z_M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_M = x_1 + x_2, 2y_M = y_1 + y_2, 2z_M = z_1 + z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

E podemos escrever:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

EXEMPLOS

1. Sendo $A(-1, 2, 3)$ e $B(5, -6, 1)$, escreva os vetores $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$.

Solução

$$\mathbf{AB} = (B - A) = (5 - (-1), -6 - 2, 1 - 3) = (5 + 1, -6 - 2, 1 - 3) = (6, -8, -2) \Rightarrow \mathbf{AB} = (6, -8, -2)$$

$$\mathbf{BA} \text{ é o oposto de } \mathbf{AB}: \mathbf{BA} = -\mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{BA} = (-6, 8, 2)$$

2. Sendo $A(2, -1, 6)$ e $\mathbf{u} = (3, -4, -1)$, determine o ponto $B = A + \mathbf{u}$.

Solução

$$B = A + \mathbf{u} = (2, -1, 6) + (3, -4, -1) = (2 + 3, (-1) + (-4), 6 + (-1)) = (2 + 3, -1 - 4, 6 - 1) = (5, -5, 5) \Rightarrow B(5, -5, 5)$$

3. Ache o ponto médio M do segmento de reta com extremos $A(5, -2, 6)$ e $B(1, -8, -2)$

Solução

$$\begin{aligned} M\left(\frac{5+1}{2}, \frac{(-2)+(-8)}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right) &\Rightarrow M\left(\frac{5+1}{2}, \frac{-8-2}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M\left(\frac{6}{2}, \frac{-10}{2}, \frac{4}{2}\right) \Rightarrow M(3, -5, 2) \end{aligned}$$

A3.7 Estudo da reta

A caracterização vetorial da reta é exatamente a mesma que apresentamos no Apêndice 2. A diferenciação só surge no que concerne à expressão dos elementos pertinentes em termos de coordenadas. Isso posto, vamos rerepresentar a conceituação vetorial da reta, com o intuito de reavivar o conteúdo no espírito do leitor.

A3.7.1 Equação vetorial da reta

Sejam: P_0 um ponto dado (fixo) do espaço euclidiano $Oxyz$, e $\mathbf{u}$ um vetor dado (fixo) do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Nesse caso, o vetor $\mathbf{u}$ determina uma *direção fixa* no espaço cartesiano $Oxyz$, e existe uma infinidade de retas com essa direção (todas paralelas entre si), contidas no espaço cartesiano $Oxyz$. Dessa infinidade, uma *única* reta passa pelo ponto P_0 . Vamos caracterizar essa reta, com auxílio dos vetores, dizendo:

Reta r , determinada pelo ponto P_0 e pelo vetor $\mathbf{u}$, é o conjunto dos pontos P pertencentes ao espaço cartesiano $Oxyz$, tais que o vetor $\mathbf{P_0P}$ é *paralelo* ao vetor $\mathbf{u}$ (Figura A3.12):

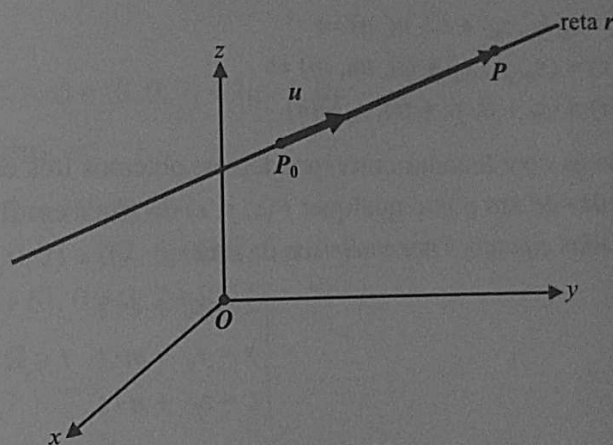


Figura A3.12

Aplicando o resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2, obtemos as equivalências:

$P \in \text{reta } r \Leftrightarrow \mathbf{P_0P} \parallel \mathbf{u} \Leftrightarrow$ existe um *único* número real t tal que $\mathbf{P_0P} = t\mathbf{u}$.

A equação $\mathbf{P_0P} = t\mathbf{u}$ é denominada *equação vetorial* da reta r .

A notação de Grassmann nos oferece uma forma mais adequada dessa equação, a que denominamos *primeira forma* da equação vetorial:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{P_0}) = t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

A notação da Seção 6.3 (soma de ponto com vetor) nos fornece a *segunda forma* da equação vetorial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_0} + t\mathbf{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

A3.7.2 Equação vetorial em termos de coordenadas

Denotando por:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$: o *ponto dado* da reta r

$P(x, y, z)$: um *ponto qualquer* da reta r

$\mathbf{u} = (l, m, n)$: o vetor que determina a direção da reta r ,

temos:

a. Equação vetorial da reta r – primeira forma

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}$$

b. Equação vetorial da reta r – segunda forma

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \quad t \in \mathbb{R}$$

Nomenclatura

Designações usuais:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$: Ponto-base da reta r

$\mathbf{u} = (l, m, n)$: Vetor diretor da reta r

t : parâmetro da reta r

A3.7.3 Equações paramétricas

Desenvolvendo as operações indicadas na *segunda forma* da equação vetorial da reta r , vem:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + (tl, tm, tn) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (x_0 + tl, y_0 + tm, z_0 + tn) \end{aligned}$$

Igualando as coordenadas correspondentes, obtemos três equações algébricas que fornecem as coordenadas de um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da reta r em função do parâmetro t , sendo por isso denominadas *equações paramétricas* da reta r :

$$r \begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Observação: Levando-se em conta que qualquer ponto *dado* (conhecido) de uma reta pode ser um ponto-base e que, dado um vetor diretor da reta, qualquer vetor *paralelo* a ele tem a direção da reta, conclui-se que uma reta tem uma *infinitude* de equações vetoriais (e paramétricas).

EXEMPLOS

Observação: No que se segue, as *variáveis* x, y, z representarão sempre as coordenadas de um ponto qualquer $P(x, y, z)$ pertencente a uma reta.

1. Ache equações: vetorial (primeira forma e segunda forma) e paramétricas de cada reta especificada a seguir.
 - a. Da reta r , que passa pelo ponto $A(1, -2, 6)$, e tem a direção do vetor $\mathbf{u} = (4, 3, -1)$.
 - b. Da reta s , que passa pelo ponto $B(0, 0, 7)$, e tem a direção do vetor $\mathbf{v} = (6, 0, 0)$.
 - c. Da reta p , que passa pela origem O e tem a direção do vetor $\mathbf{w} = (0, -5, 2)$.

Solução

a. Equação vetorial

Primeira forma:

$$(P - A) = t\mathbf{u} \Rightarrow (x - 1, y - (-2), z - 6) = t(4, 3, -1) \Rightarrow (x - 1, y + 2, z - 6) = t(4, 3, -1)$$

Segunda forma:

$$P = A + t\mathbf{u} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -2, 6) + t(4, 3, -1)$$

Equações paramétricas (partimos da equação vetorial – segunda forma e desenvolvemos as operações indicadas)

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, -2, 6) + t(4, 3, -1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (1, -2, 6) + (4t, 3t, -t) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (1 + 4t, -2 + 3t, 6 - t) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 - t \end{cases}$$

b. Equação vetorial

Primeira forma:

$$(P - B) = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (x - 0, y - 0, z - 7) = \lambda(6, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z - 7) = \lambda(6, 0, 0)$$

Segunda forma:

$$P = B + \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 7) + \lambda(6, 0, 0)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0, 0, 7) + \lambda(6, 0, 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (0, 0, 7) + (6\lambda, 0, 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (0 + 6\lambda, 0 + 0, 7 + 0) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 0 \\ z = 7 \end{cases}$$

c. Equação vetorial

Primeira forma:

$$(P - O) = \mu \mathbf{w} \Rightarrow (x - 0, y - 0, z - 0) = \mu(0, -5, 2) \Rightarrow (x, y, z) = \mu(0, -5, 2)$$

Segunda forma:

$$P = O + \mu \mathbf{w} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) + \mu(0, -5, 2)$$

Equações paramétricas:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (0, 0, 0) + \mu(0, -5, 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (0, 0, 0) + (0, -5\mu, 2\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (0 + 0, 0 - 5\mu, 0 + 2\mu) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 0 \\ y = -5\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

2. Determine equações: vetorial (primeira forma e segunda forma) e paramétricas da reta r , que passa pelos pontos $A(1, -3, 4)$ e $B(3, 2, -2)$.



Figura A3.13

Solução

(Ver **Observação** antes dos exemplos.)

Ponto-base: escolhemos $A(1, -3, 4)$

Vetor diretor: escolhemos $\overrightarrow{AB}$. Calculando:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (B - A) = (3 - 1, 2 - (-3), -2 - 4) = (3 - 1, 2 + 3, -2 - 4) = (2, 5, -6) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} &= (2, 5, -6)\end{aligned}$$

Equação vetorial

Primeira forma:

$$(P - A) = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x - 1, y - (-3), z - 4) = t(2, 5, -6) \Rightarrow (x - 1, y + 3, z - 4) = t(2, 5, -6)$$

Segunda forma:

$$P = A + t\overrightarrow{AB} \Rightarrow (x, y, z) = (1, -3, 4) + t(2, 5, -6)$$

Equações paramétricas:

Desenvolvendo a segunda forma da equação vetorial:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, -3, 4) + t(2, 5, -6) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (1, -3, 4) + (2t, 5t, -6t) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (1 + 2t, -3 + 5t, 4 - 6t) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 4 - 6t \end{cases}$$

3. Ache equações: vetorial (primeira forma e segunda forma) e paramétricas da reta r , que passa pelo ponto médio (M) do segmento de reta com extremos $A(10, -7, 4)$ e $B(-2, 1, 6)$ e é paralela ao vetor $v = (3, 7, -1)$.

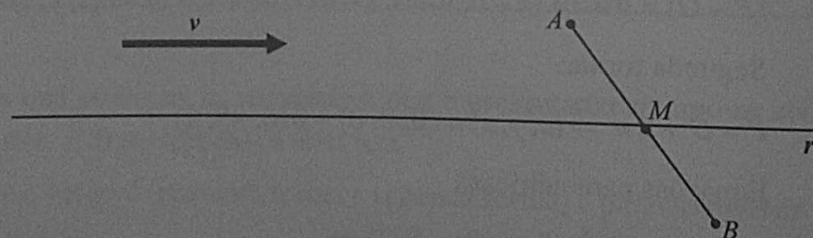


Figura A3.14

Solução

Ponto-base: M (ver Seção A3.6.4)

$$\begin{aligned}M\left(\frac{10 + (-2)}{2}, \frac{(-7) + 1}{2}, \frac{4 + 6}{2}\right) &\Rightarrow M\left(\frac{10 - 2}{2}, \frac{-7 + 1}{2}, \frac{4 + 6}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow M\left(\frac{8}{2}, \frac{-6}{2}, \frac{10}{2}\right) &\Rightarrow M(4, -3, 5)\end{aligned}$$

Vetor diretor: $v = (3, 7, -1)$

Equação vetorial

Primeira forma:

$$(P - M) = tv \Rightarrow (x - 4, y - (-3), z - 5) = t(3, 7, -1) \Rightarrow (x - 4, y + 3, z - 5) = t(3, 7, -1)$$

Segunda forma:

$$P = M + tv \Rightarrow (x, y, z) = (4, -3, 5) + t(3, 7, -1)$$

Equações paramétricas:

Desenvolvendo a segunda forma da equação vetorial:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (4, -3, 5) + t(3, 7, -1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (4, -3, 5) + (3t, 7t, -t) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (4 + 3t, -3 + 7t, 5 - t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + 7t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

4. Dada a reta r :

$$r \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 + 7t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Pede-se: Verifique se cada ponto dado pertence ou não a ela:

- a. $A(7, 7, 3)$ b. $B(-5, 1, 6)$ c. $C(11, 9, 4)$

Solução

(Solicitamos ao LESI* que leia a solução do Exemplo 4, A2.3.2 – Apêndice 2)

- a. $A(7, 7, 3)$

Substituímos, nas equações paramétricas da reta r , as variáveis x, y, z pelas coordenadas correspondentes do ponto A e calculamos cada valor de t :

$$7 = -1 + 4t \Rightarrow 4t = 7 + 1 \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2$$

$$7 = 3 + 7t \Rightarrow 7t = 7 - 3 \Rightarrow 7t = 4 \Rightarrow t = 2$$

$$3 = 5 - t \Rightarrow t = 5 - 3 \Rightarrow t = 2$$

Logo, A pertence à reta r

- b. $B(-5, 1, 6)$

Como no item a:

$$-5 = -1 + 4t \Rightarrow 4t = -5 + 1 \Rightarrow 4t = -4 \Rightarrow t = -1$$

$$1 = 3 + 7t \Rightarrow 7t = 1 - 3 \Rightarrow 7t = -2 \Rightarrow t = -1$$

$$6 = 5 - t \Rightarrow t = 5 - 6 \Rightarrow t = -1$$

Logo, B pertence à reta r

*Leitor esforçado, sagaz e imaginativo.

c. $C(11, 9, 4)$

$$11 = -1 + 4t \Rightarrow 4t = 11 + 1 \Rightarrow 4t = 12 \Rightarrow t = 3$$

$$9 = 3 + 2t \Rightarrow 2t = 9 - 3 \Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = 3$$

$$4 = 5 - t \Rightarrow t = 5 - 4 \Rightarrow t = 1 \neq 3$$

Logo, C não pertence à reta r . ■

A3.7.4 Paralelismo

Prescindindo do estudo da reta em termos de coordenadas, a teoria relativa ao paralelismo de retas é a mesma já exposta no Apêndice 2, Seção A2.3.3. Por isso vamos reproduzi-la a seguir com pequenas modificações, deixando para os exemplos o tratamento em termos de coordenadas, onde surgem as diferenciações.

Na Seção A3.7.1, fizemos a observação de que uma reta tem uma infinidade de equações vetoriais, de acordo com o ponto-base escolhido e o vetor diretor. Destacamos o fato de que qualquer vetor paralelo a um dado vetor diretor determina a mesma direção.

Essa observação dá ensejo à seguinte questão: dadas duas equações vetoriais, com respectivos pontos-base e *vetores diretores paralelos*, como determinar se essas equações representam a mesma reta ou retas paralelas distintas?

Consideremos então:

- Uma reta r , com ponto-base P_0 e vetor diretor $\mathbf{u}_r$
- Uma reta s , com ponto-base Q_0 e vetor diretor $\mathbf{u}_s$
- A condição sobre os vetores diretores é: $\mathbf{u}_r \parallel \mathbf{u}_s$

A observação pensante da Figura A3.15 praticamente resolve nossa questão.

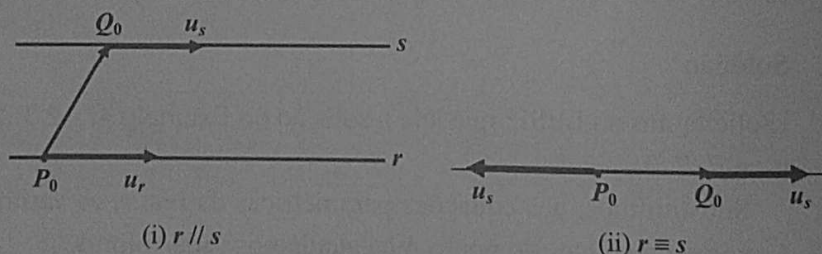


Figura A3.15

Na figura (i): $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ não é paralelo a $\mathbf{u}_r$ (ou a $\mathbf{u}_s$) $\Rightarrow$ as retas r e s são paralelas distintas. ($r \parallel s$).

Na figura (ii): $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ é paralelo a $\mathbf{u}_r$ (ou a $\mathbf{u}_s$) $\Rightarrow$ as retas r e s são coincidentes. ($r \equiv s$).

Observação importante: Na geometria analítica plana, vimos que (ver *Observação* ao final da Seção A2.3.3, Apêndice 2), se os vetores diretores das retas r e s não são paralelos, então as retas se interceptam em um único ponto $P_1 = \{r \cap s\}$.

Isso acontece porque, estando ambas as retas contidas no plano cartesiano Oxy , elas têm que se interceptar, se não forem paralelas.

No espaço tridimensional, se os vetores diretores não forem paralelos, temos mais uma possibilidade, pois as retas podem *não estar contidas (ambas) em um mesmo plano* (ou seja, a reta r contida em um plano e a reta s contida em um outro plano) e, portanto, *não se interceptam*. Nesse caso, dizemos que as retas são **reversas**.

Resumindo: No Espaço Cartesiano $Oxyz$, se os vetores diretores de duas retas r e s não são paralelos, então as retas podem ser concorrentes em um único ponto $P_1 = \{r \cap s\}$, ou podem ser reversas. Estudaremos esse caso na sequência dos exemplos.

EXEMPLOS

1. Mostre que as retas

$$r \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \text{ e } s \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 6 - 6\lambda \end{cases}$$

são paralelas distintas ($r \parallel s$).

Solução

Reta r : $P_0(3, 1, 2)$ (ponto-base)

$\mathbf{u}_r = (2, -1, 3)$ (vetor diretor)

Reta s : $Q_0(4, -1, 6)$ (ponto-base)

$\mathbf{u}_s = (-4, 2, -6)$ (vetor diretor)

Dividindo as coordenadas correspondentes dos vetores diretores, por exemplo, as de $\mathbf{u}_r$ pelas de $\mathbf{u}_s$ (ou o contrário):

$$\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_r // \mathbf{u}_s \text{ (conforme a Seção 3.3.c)} \Rightarrow r \parallel s \text{ ou } r \equiv s.$$

Calculamos $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ (ou $\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_0$):

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0) = (4 - 3, -1 - 1, 6 - 2) = (1, -2, 4) \Rightarrow \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = (1, -2, 4).$$

Dividindo as coordenadas correspondentes de $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ e $\mathbf{u}_r$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{-2}{-1} = 2, \quad \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Como as divisões não são todas iguais, concluímos que $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$ e $\mathbf{u}_r$ não são paralelos e, portanto, $r \parallel s$ (retas paralelas distintas).

2. Mostre que as retas

$$m \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = 10 - 5\mu \end{cases} \text{ e } n \begin{cases} x = 6 + 3\rho \\ y = 3 + 6\rho \\ z = -15\rho \end{cases}$$

são coincidentes ($m \equiv n$).

Solução

Reta m : $P_0(4, -1, 10)$ (ponto-base)

$\mathbf{u}_m = (1, 2, -5)$ (vetor diretor)

Reta n : $Q_0(6, 3, 0)$ (ponto-base)

$\mathbf{u}_n = (3, 6, -15)$ (vetor diretor)

Dividindo as coordenadas correspondentes de $\mathbf{u}_m$ e $\mathbf{u}_n$:

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{-15}{-3} = 3, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_m // \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0) = (6 - 4, 3 - (-1), 0 - 10) = (2, 4, -10) \Rightarrow \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 = (2, 4, -10)$$

Comparando com $\mathbf{u}_n$:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 // \mathbf{u}_n \Rightarrow m \equiv n$$

No Exemplo 3, estudaremos o caso em que $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$ não são paralelos, e vamos expor um método para verificar se duas retas são concorrentes ou reversas, e, caso sejam concorrentes, achar o ponto de intersecção (ver Observação importante no fim da Seção A3.7.4).

3. Em cada caso dado, mostre, primeiramente, que as retas não são paralelas nem coincidentes. Depois, verifique se são concorrentes ou reversas, e, caso sejam concorrentes, ache o seu ponto de intersecção.

$$\text{a. } r \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -9 - 4\lambda \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}$$

Solução

Solicitamos ao leitor que acompanhe o raciocínio:

Se as retas se interceptam em um ponto $P_1 = \{r \cap s\}$, este é *único* e deve pertencer à reta r e à reta s . Então, *existe um único valor numérico* de t , o qual, substituído nas equações paramétricas da reta r , fornece as coordenadas de P_1 ; e *existe um único valor numérico* de λ , o qual, substituído nas equações paramétricas da reta s , fornece as coordenadas de P_1 . Isso significa que, se igualarmos os termos correspondentes das equações paramétricas das retas r e s , obteremos um sistema linear com *três* equações e *duas* incógnitas t e λ , o qual tem *uma única solução* (os respectivos valores de t e λ , que fornecem as coordenadas do ponto P_1). Remarquemos bem o que isso significa: *os mesmos dois valores numéricos* de t e λ devem verificar as *três equações* do sistema linear obtido.

Do exposto, segue o método para resolver o problema:

Igualamos os termos correspondentes das equações paramétricas das retas r e s , obtendo um sistema linear com *três* equações e *duas* incógnitas (os dois parâmetros). Denominemo-lo *sistema S*.

Escolhemos arbitrariamente *duas* dentre as três equações do sistema S , obtendo um sistema com *duas* equações e *duas* incógnitas.

Denominemo-lo *sistema S'*.

E temos:

- (1) Se S' não tem solução, S também não terá. Isso significa que *não existe o ponto de intersecção* P_1 , e as retas são *reversas*.

(2) Se S' tem solução (ou seja, um único valor numérico de t e um único valor numérico de λ que verificam as duas equações de S'), substituímos essa solução na equação restante (a que não usamos), e segue que:

(i) Se a solução não verifica a equação restante, então o sistema S não tem solução, e as retas são *reversas*.

(ii) Se a solução verifica a equação restante, então ela é a solução do sistema S , e as retas são concorrentes. Substituindo o valor numérico calculado de t nas equações paramétricas da reta r , ou o valor numérico calculado de λ nas equações paramétricas da reta s , determinamos o ponto de intersecção $P_i = \{r \cap s\}$.

No caso dado a), primeiro verifiquemos que as retas r e s não são paralelas, nem coincidentes.

De fato, os vetores diretores das retas r e s são, respectivamente, $\mathbf{u}_r = (-1, 2, -3)$ e $\mathbf{u}_s = (1, -4, 2)$. Dividindo as coordenadas correspondentes de $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$:

$$\frac{-1}{1} = -1, \quad \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

Logo, $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$ não são paralelos $\Rightarrow r$ e s são concorrentes ou reversas. Aplicaremos então o método exposto, para verificar qual dos casos ocorre.

Igualando os termos correspondentes das equações paramétricas, vem:

$$\begin{aligned} 4 - t &= 5 + \lambda \\ -1 + 2t &= -9 - 4\lambda \\ 5 - 3t &= 5 + 2\lambda \end{aligned}$$

Escrevendo na forma usual para sistemas lineares:

$$S \begin{cases} -t - \lambda = 1 & (1) \\ 2t + 4\lambda = -8 & (2) \\ -3t - 2\lambda = 0 & (3) \end{cases}$$

Escolhemos arbitrariamente duas equações, por exemplo, (1) e (3):

$$S' \begin{cases} -t - \lambda = 1 & (1) \\ -3t - 2\lambda = 0 & (3) \end{cases}$$

O sistema S' tem como solução: $t = 2, \lambda = -3$. (Solicitamos ao LESI* que resolva, para praticar.) Substituindo $t = 2$ e $\lambda = -3$ no lado esquerdo da equação (2):

$$2t + 4\lambda = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 4 - 12 = -8 = \text{lado direito.}$$

Logo, $t = 2$ e $\lambda = -3$ verificam a equação (2).

Portanto, concluímos que as retas r e s são concorrentes. Levando $t = 2$ nas equações paramétricas da reta r , determinamos o ponto de intersecção P_i :

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2 = 2 \\ y &= -1 + 2 \cdot 2 = -1 + 4 = 3 \\ z &= 5 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1 \\ \Rightarrow P_i(2, 3, -1) \end{aligned}$$

*Leitor esforçado, sagaz e imaginativo.

Verificação

Levando $\lambda = -3$ nas equações paramétricas da reta s :

$$x = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$y = -9 - 4 \cdot (-3) = -9 + 12 = 3$$

$$z = 5 + 2 \cdot (-3) = 5 - 6 = -1$$

$$\Rightarrow P_1(2, 3, -1)$$

$$\text{b. } p \begin{cases} x = 6 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases} \text{ e } q \begin{cases} x = -1 - 2\mu \\ y = 5 + \mu \\ z = 2 + 2\mu \end{cases}$$

Solução

Vetores diretores: $\mathbf{u}_p = (1, 4, -3)$, $\mathbf{u}_q = (-2, 1, 2)$. Dividindo as coordenadas correspondentes de $\mathbf{u}_p$ e $\mathbf{u}_q$:

$$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}, \frac{4}{1} = 4, \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbf{u}_p$ e $\mathbf{u}_q$ não são paralelos $\Rightarrow$ as retas não são paralelas, nem coincidentes $\Rightarrow$ são concorrentes, ou reversas.

Aplicando o método, começamos igualando os termos correspondentes das equações paramétricas:

$$6 + \lambda = -1 - 2\mu$$

$$1 + 4\lambda = 5 + \mu$$

$$-2 - 3\lambda = 2 + 2\mu$$

Escrevemos na forma usual:

$$S \begin{cases} \lambda + 2\mu = -7 & (1) \\ 4\lambda - \mu = 4 & (2) \\ -3\lambda - 2\mu = 4 & (3) \end{cases}$$

Escolhemos arbitrariamente duas equações, por exemplo, (1) e (2):

$$S' \begin{cases} \lambda + 2\mu = -7 & (1) \\ 4\lambda - \mu = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Solução do sistema } S': \lambda = \frac{1}{9}, \mu = -\frac{32}{9}$$

(Solicitamos ao LESIP* que resolva, para praticar).

Substituindo $\lambda = \frac{1}{9}$ e $\mu = -\frac{32}{9}$ no lado esquerdo da equação (3):

$$-3\lambda - 2\mu = -3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \left(-\frac{32}{9}\right) = -\frac{3}{9} + \frac{64}{9} = \frac{61}{9} \neq 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ não verificam $\Rightarrow$ O sistema S não tem solução $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ as retas p e q são reversas.

*Leitor esforçado, sagaz, imaginativo e praticante.

A3.7.5 Perpendicularismo e ortogonalidade

Sejam:

reta r , com ponto-base P_0 , e vetor diretor $\mathbf{u}_r$;
 reta s , com ponto-base Q_0 , e vetor diretor $\mathbf{u}_s$.

Como vimos, se os vetores diretores *não* são paralelos, as retas podem ser concorrentes, ou reversas. Um caso de particular interesse ocorre quando os vetores diretores são *ortogonais* ($\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s$).

Agora, se $\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s$, temos duas possibilidades a considerar:

1. As retas são concorrentes: nesse caso, elas são perpendiculares.
2. As retas são reversas: nesse caso, elas são denominadas *ortogonais*.

Uma caracterização de “retas reversas ortogonais”, compatível com o exposto anteriormente, é:

Caracterização:

Duas retas reversas r e s são denominadas *ortogonais* se qualquer paralela a uma delas, que intercepte a outra, é perpendicular a essa outra.

Observações:

1. Muitos problemas concernentes a perpendicularismo e ortogonalidade fogem do escopo deste Apêndice, de modo que, nos exemplos seguintes, só os abordaremos “de passagem”.
2. *Lembrete: Propriedade 6 do Produto Escalar*

$$\mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s \Leftrightarrow \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s = 0$$

EXEMPLOS

1. Em cada caso dado a seguir, verifique se as retas são perpendiculares ou ortogonais. Se forem perpendiculares, determine o ponto de intersecção.

$$\text{a. } r \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \text{ e } s \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 7 - \lambda \\ z = -7 + 6\lambda \end{cases}$$

Solução

Vetor diretor da reta r : $\mathbf{u}_r = (-2, 2, 1)$

Vetor diretor da reta s : $\mathbf{u}_s = (2, -1, 6)$

$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_s = (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 6 = -4 - 2 + 6 = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_r \perp \mathbf{u}_s$ (Lembrete 2!) $\Rightarrow$ as retas são *perpendiculares* (se forem concorrentes) ou *ortogonais* (se forem reversas).

Para verificar se as retas são perpendiculares ou reversas, vamos aplicar o nosso método. Igualamos as correspondentes equações paramétricas:

$$5 - 2t = -1 + 2\lambda$$

$$3 + 2t = 7 - \lambda$$

$$4 + t = -7 + 6\lambda$$

Escrevemos na forma usual:

$$S \begin{cases} -2t - 2\lambda = -6 & (1) \\ 2t + \lambda = 4 & (2) \\ t - 6\lambda = -11 & (3) \end{cases}$$

Escolhemos as equações (1) e (2):

$$S' \begin{cases} -2t - 2\lambda = -6 & (1) \\ 2t + \lambda = 4 & (3) \end{cases}$$

cuja solução é: $t = 1, \lambda = 2$

(Pratique, pratique, caro LESIP*!)

Levando $t = 1$ e $\lambda = 2$ no lado esquerdo da equação (3):

$t - 6\lambda = 1 - 6 \cdot 2 = 1 - 12 = -11 = \text{lado direito} \Rightarrow \text{verifica} \Rightarrow \text{as retas são concorrentes.}$

Substituindo $t = 1$ nas equações paramétricas da reta r , ou $\lambda = 2$ nas equações paramétricas da reta s , determinamos o ponto de intersecção: $P_1(3, 5, 5)$.

$$\text{b. } f \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 - 3\alpha \\ z = 2 + \alpha \end{cases} \text{ e } g \begin{cases} x = 4\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 4 - 5\beta \end{cases}$$

Solução

Vetores diretores:

Reta f : $\mathbf{u}_f = (2, -3, 1)$

Reta g : $\mathbf{u}_g = (4, 1, -5)$

$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{u}_g = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 8 - 3 - 5 = 8 - 8 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_f \perp \mathbf{u}_g \Rightarrow \text{as retas são perpendiculares ou ortogonais.}$

Aplicamos o método:

$$1 + 2\alpha = 4\beta$$

$$-1 - 3\alpha = 3 + \beta$$

$$2 + \alpha = 4 - 5\beta$$

ou:

$$S \begin{cases} 2\alpha - 4\beta = -1 & (1) \\ -3\alpha - \beta = 4 & (2) \\ \alpha + 5\beta = 2 & (3) \end{cases}$$

Escolhemos (2) e (3):

$$S' \begin{cases} -3\alpha - \beta = 4 & (2) \\ \alpha + 5\beta = 2 & (3) \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$\alpha = \frac{-11}{7}, \beta = \frac{5}{7}$$

*Leitor esforçado, sagaz, imaginativo e praticante.

Levando $\alpha = \frac{-11}{7}$ e $\beta = 7$ no lado esquerdo da equação (1):

$$2\alpha - 4\beta = 2 \cdot \left(-\frac{11}{7} \right) - 4 \cdot \frac{5}{7} = -\frac{22}{7} - \frac{20}{7} = -\frac{42}{7} = -6 \neq \text{lado direito} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ as retas são reversas, logo, são *ortogonais*.

2. Dados: o ponto $A(-9, -7, 0)$ e a reta r

$$r \begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Pede-se:

- O ponto A' , projeção ortogonal (pé da perpendicular) do ponto A sobre a reta r .
- Equações paramétricas da reta p , perpendicular a r , que passa por A (ou por A').
- O ponto A'' , simétrico de A em relação à reta r .

Solução (Figura A3.16)

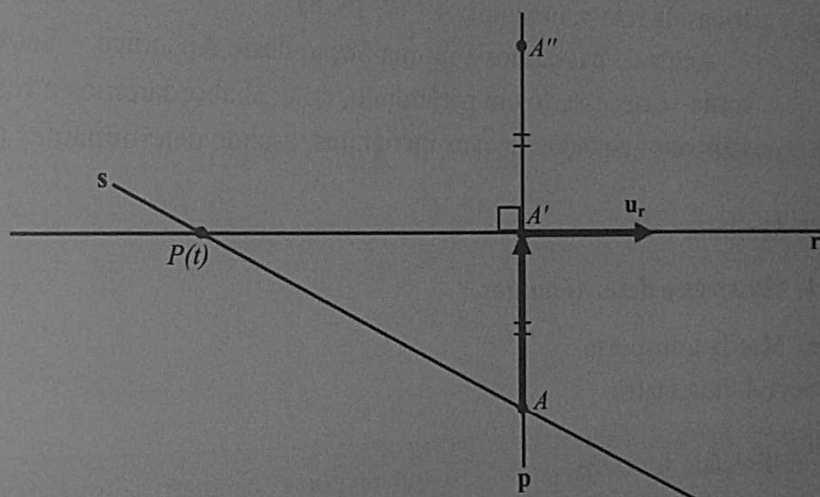


Figura A3.16

- Se $P(x, y, z)$ é um ponto qualquer pertencente à reta r , então suas coordenadas são dadas pelas equações paramétricas da reta, em função do parâmetro t , e podemos escrever:

$$P = P(t) = P(5 - 3t, -1 + 2t, 2 + t) \quad (1)$$

O vetor $\overrightarrow{AP}$ será:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (P - A) = ((5 - 3t) - (-9), (-1 + 2t) - (-7), (2 + t) - 0) = \\ &= 5 - 3t + 9, -1 + 2t + 7, 2 + t \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (14 - 3t, 6 + 2t, 2 + t). \end{aligned}$$

Para o valor numérico de t tal que $P \equiv A'$, vale: $\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{u}_r$, ou, pela Propriedade 6 do Produto Escalar: $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}_r = 0$.

Calculando:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}_r &= (14 - 3t, 6 + 2t, 2 + t) \cdot (-3, 2, 1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-3) \cdot (14 - 3t) + 2 \cdot (6 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) &= 0 \Rightarrow 14t - 28 = 0 \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Substituindo $t = 2$ em (1), obtemos o ponto A' : $A'(-1, 3, 4)$.

b. Reta p :Ponto-base: $A(-9, -7, 0)$ Vetor diretor: $\mathbf{u}_p = \mathbf{A}\mathbf{A}' = (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{u}_p = (8, 10, 4)$

Equações paramétricas:

$$p \begin{cases} x = -9 + 8\lambda \\ y = -7 + 10\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

c. Primeiro modo:

(já aplicado no Apêndice 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= \mathbf{A}' + \mathbf{A}\mathbf{A}' (= \mathbf{A} + 2\mathbf{A}\mathbf{A}') \Rightarrow \mathbf{A}'' = (-1, 3, 4) + (8, 10, 4) = \\ &= (-1 + 8, 3 + 10, 4 + 4) \Rightarrow \mathbf{A}''(7, 13, 8). \end{aligned}$$

Segundo modo:

Na reta p , partindo do ponto-base A , obtemos A' , fazendo $\lambda = 1$ (verifique!). Para obter A'' , partindo de A , temos que andar o *dobro* ou seja, $\lambda = 2$. Fazendo $\lambda = 2$ nas equações paramétricas da reta p , obtemos: $A''(7, 13, 8)$.

Antes de passarmos à última Seção deste Apêndice – Seção A3.8 – Estudo do Plano –, torna-se necessário um preâmbulo, no qual abordaremos a resolução de Sistemas Lineares com *duas* equações e *duas* incógnitas, usando determinantes (regra de Cramer). ■

Preâmbulo

1. Matrizes e determinantes

a. Matriz transposta

Seja A uma matriz.

Definição A *transposta* de A , denotada por A' , é a matriz obtida trocando-se as linhas por colunas (ou, colunas por linhas) da matriz A , isto é, a primeira linha de A torna-se a primeira coluna de A' a segunda linha de A torna-se a segunda coluna de A' , e assim por diante.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ então } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Denotando os determinantes de A e de A' , respectivamente, por $\det A$ e $\det A'$, temos a Proposição:

$$\text{Proposição } \det A = \det A'$$

Demonstração

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\Rightarrow \det A = \det A'$$

b. Uma propriedade dos determinantes
Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Propriedade

Se permutamos duas linhas (ou duas colunas) da matriz A , seu determinante *muda de sinal*.

Demonstração

Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Permutando, por exemplo, duas colunas:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -\det A$$

2. Resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, usando determinantes (regra de Cramer)

Consideremos o sistema linear S , com duas equações e duas incógnitas, λ e μ :

$$S \begin{cases} a_{11}\lambda + a_{12}\mu = b_1 & (1) \\ a_{21}\lambda + a_{22}\mu = b_2 & (2) \end{cases}$$

em que $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ são constantes reais, denominadas *coeficientes das incógnitas*; e b_1, b_2 são constantes reais, denominadas *termos independentes*.

Como é usual, omitimos o sinal do produto ($\cdot$) entre os coeficientes das incógnitas e as incógnitas.

A matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é denominada *matriz dos coeficientes das incógnitas*.

Vamos determinar, sucintamente, a solução do sistema e observar pensantemente o resultado final.

(i) Cálculo de λ

Multiplicamos a equação (1) por a_{22} , e a equação (2) por a_{12} :

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \lambda + a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu = b_1 \cdot a_{22}$$

$$a_{12} \cdot a_{21} \cdot \lambda + a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu = b_2 \cdot a_{12}$$

Subtraímos as equações membro a membro:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \lambda + a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot \lambda + a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot \lambda + a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu - a_{12} \cdot a_{21} \cdot \lambda - a_{12} \cdot a_{22} \cdot \mu = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot \lambda = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

Se $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$, podemos dividir a equação anterior por $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, obtendo um único valor numérico para λ :

$$\lambda = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Observemos agora que, o denominador da fração é o *determinante da matriz A* (matriz dos coeficientes das incógnitas) e o numerador é o *determinante* da matriz obtida substituindo, na matriz *A*, a *coluna dos coeficientes da incógnita λ* pela *coluna dos termos independentes*.

Denotando cada um desses determinantes respectivamente por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

temos: $\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta}$, se $\Delta \neq 0$

(ii) Cálculo de μ

Multiplicando a equação (1) por a_{21} , a equação (2) por a_{11} e subtraindo as equações resultantes membro a membro (mãos à obra, caro leitor!), obtemos:

$$\mu = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

O denominador da fração é, como no cálculo de λ , o *determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas* ($\Delta = \det A$), e o numerador é o *determinante* da matriz obtida substituindo, na matriz *A*, a *coluna dos coeficientes da incógnita μ* pela *coluna dos termos independentes*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_\mu = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

temos: $\mu = \frac{\Delta_\mu}{\Delta}$, se $\Delta \neq 0$

Resumindo:

O sistema *tem uma única solução* se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas é diferente de zero

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nesse caso, a solução do sistema é dada por:

$$\text{temos: } \lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\Delta_\mu}{\Delta}, \quad \text{sendo } \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_\mu = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

A3.8 Estudo do plano

A3.8.1 Nomenclatura

Iniciamos este tópico introduzindo a noção de vetores coplanares:
Sejam u, v, w vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Dizemos que u, v, w são *coplanares* se eles podem ser representados por segmentos orientados contidos em um mesmo plano. Caso contrário, dizemos que os vetores u, v, w são *não-coplanares* (ou, *não são coplanares*). A Figura A3.17 ilustra essas denominações.

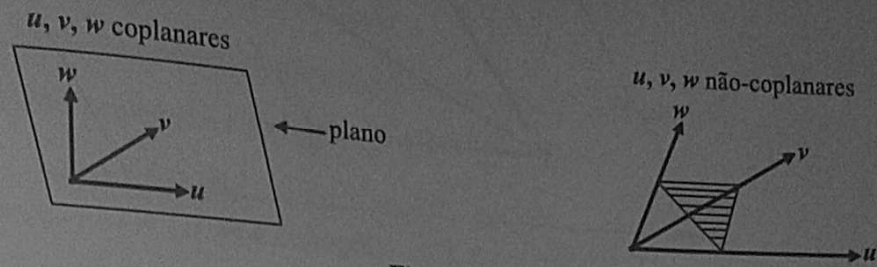


Figura A3.17

A3.8.2 Caracterização vetorial do plano

Sejam:

P_0 : um ponto *dado* (conhecido, fixo) do espaço cartesiano $Oxyz$.

u, v : dois vetores *dados* (conhecidos, fixos) do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, ambos *não nulos* e *não paralelos*.

Se representamos u e v por segmentos orientados com origem no ponto P_0 , então a condição “ u e v não-paralelos” implica que as retas que contêm os representantes são *concorrentes no ponto* P_0 . A consequência disso é que *existe um único plano que as contém*. Podemos também dizer que *existe um único plano determinado pelo ponto P_0 e pelos vetores u e v* (se $u \parallel v$, isso não é verdade, pois teríamos uma reta passando pelo ponto P_0 , e por uma reta passam infinitos planos). Denominemo-lo *plano π* .

Assim como fizemos no Estudo da reta, Seção A3.7, vamos agora caracterizar o plano π , com o auxílio dos vetores.

A Figura A3.18 ajudará na compreensão do resultado exposto a seguir.

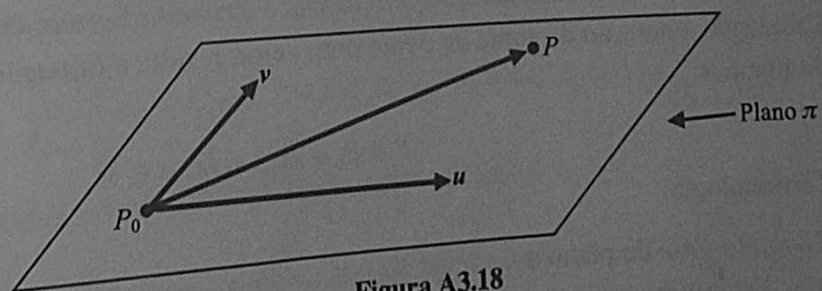


Figura A3.18

A3.8.3 Equação vetorial do plano

Sejam: o ponto P_0 ; os vetores u, v (u e v não-paralelos), como anteriormente; π o plano já caracterizado, e P um ponto qualquer pertencente ao plano π .

Mais uma vez, vamos descrever uma sequência de construções e raciocínios, os quais virão depois da representação geométrica concernente, e solicitamos ao leitor que pratique a alternância entre a descrição temporal abstrata e a condensação espacial concreta (Figura A3.19).

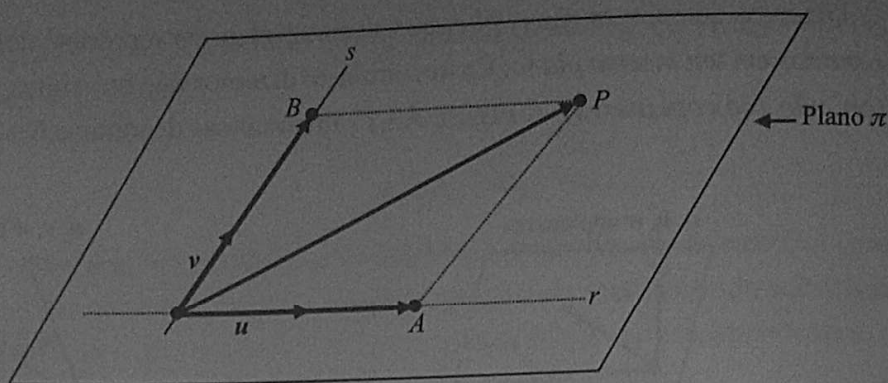


Figura A3.19

Por P , traçamos duas retas: uma paralela à reta s ; outra, paralela à reta r . A primeira intercepta a reta r em um único ponto A ; a outra intercepta a reta s em um único ponto B [caro leitor, consulte a Figura A3.19 para certificar-se de que essas paralelas só interceptam as retas r e s (e, portanto, só determinam os únicos pontos A e B) se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ forem **coplanares**!].

Agora, vamos aplicar duas vezes o Resultado da Seção A2.1.3, Apêndice 2 (Vetores paralelos):

- $\mathbf{P}_0\mathbf{A} \parallel \mathbf{u} \Leftrightarrow$ existe um único número real λ tal que $\mathbf{P}_0\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u}$
- $\mathbf{P}_0\mathbf{B} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow$ existe um único número real μ tal que $\mathbf{P}_0\mathbf{B} = \mu \mathbf{v}$.

Sendo o quadrilátero P_0APB um *paralelogramo* (por construção), aplicamos a regra do paralelogramo para soma de vetores, obtendo:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\mathbf{A} + \mathbf{P}_0\mathbf{B}$$

Substituindo $\mathbf{P}_0\mathbf{A}$ e $\mathbf{P}_0\mathbf{B}$, segue que:

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

Escrevendo $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ na notação de Grassmann, temos a equação vetorial:

$$(P - P_0) = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Essa equação é denominada *Equação Vetorial – Primeira Forma*, do plano π .

Utilizando a notação da soma de ponto com vetor, resulta a *Equação Vetorial – Segunda Forma*, do plano π :

$$P = P_0 + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Terminologia:

P_0 : Ponto-base do plano π

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: Vetores diretores do plano π

λ , μ : Parâmetros do plano π

A3.8.4 Equações paramétricas do plano

A segunda forma da equação vetorial do plano π , expressa em termos de coordenadas, constitui o que denominamos *equações paramétricas* do plano π . De fato, sejam:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$: Ponto-base do plano π

$\mathbf{u} = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{v} = (l_2, m_2, n_2)$ ($\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-paralelos): Vetores diretores do plano π

$P(x, y, z)$: um ponto qualquer pertencente ao plano π .

Então, a segunda forma da equação vetorial do plano π

$$P = P_0 + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

É escrita em termos de coordenadas como:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(l_1, m_1, n_1) + \mu(l_2, m_2, n_2)$$

Desenvolvendo as operações indicadas:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + (l_1\lambda, m_1\lambda, n_1\lambda) + (l_2\mu, m_2\mu, n_2\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (x_0 + l_1\lambda + l_2\mu, y_0 + m_1\lambda + m_2\mu, z_0 + n_1\lambda + n_2\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi \begin{cases} x = x_0 + l_1\lambda + l_2\mu \\ y = y_0 + m_1\lambda + m_2\mu \\ z = z_0 + n_1\lambda + n_2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Em verdade, essas equações são pouco práticas para o estudo do plano. Só as apresentamos porque vamos obter, a partir delas, uma equação bem simples, a qual relaciona as variáveis x, y, z entre si. Para chegar a isso, vamos “eliminar” os parâmetros λ e μ , justificando os passos necessários pela teoria apresentada no Preâmbulo à Seção A3.8.

A3.8.5 Equação geral do plano

Preâmbulo

Iniciamos traduzindo a condição “ $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não-paralelos” em termos de determinantes.

Considerando os vetores $\mathbf{u} = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{v} = (l_2, m_2, n_2)$, e supondo, por exemplo, $l_2 \cdot m_2 \cdot n_2 \neq 0$, temos, de acordo com o critério apresentado na Seção A3.3.3 c:

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

No lado direito da equivalência, temos três igualdades.

Da igualdade entre o primeiro e o segundo termo resulta:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow l_1 \cdot m_2 = m_1 \cdot l_2 \Leftrightarrow l_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot l_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Da igualdade entre o segundo e o terceiro termo resulta:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot m_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Da igualdade entre o primeiro e o terceiro termo resulta:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_1}{n_2} \Leftrightarrow l_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot l_2 \Leftrightarrow l_1 \cdot n_2 - n_1 \cdot l_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto:

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Equivalentemente:

$u \not\sim v \Leftrightarrow$ Pelo menos um dos determinantes é diferente de zero.

Tendo em vista o que segue, vamos supor $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Conforme a Proposição 1a do Preâmbulo (o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta), a nossa suposição equivale a:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(Calma, paciente leitor, na sequência da nossa exposição esclareceremos isso!)

Agora, vamos ao nosso encargo.

Primeiramente, reescrevemos as equações paramétricas do plano π , com pequenas modificações:

$$S \begin{cases} l_1 \lambda + l_2 \mu = x - x_0 & (1) \\ m_1 \lambda + m_2 \mu = y - y_0 & (2) \\ n_1 \lambda + n_2 \mu = z - z_0 & (3) \end{cases}$$

Lembramos que, para cada valor numérico fixado de x, y, z , *existem únicos* valores numéricos de λ e μ que verificam as equações anteriores.

Em linguagem de sistemas lineares, isso significa que o sistema S , com *três* equações e duas incógnitas λ e μ , *tem uma única solução*.

Vamos escolher *duas* dentre as três equações, de modo que o subsistema S' com *duas* equações e duas incógnitas λ e μ tenha *uma única solução*. Por exemplo, as equações (1) e (2):

$$S' \begin{cases} l_1 \lambda + l_2 \mu = x - x_0 & (1) \\ m_1 \lambda + m_2 \mu = y - y_0 & (2) \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes das incógnitas é: $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$

Pela suposição do Preâmbulo, $\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Conforme o Preâmbulo da Seção A3.8(2.), o sistema S' *tem solução única*, dada por:

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & l_2 \\ y - y_0 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} l_1 & x - x_0 \\ m_1 & y - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}}$$

Para que a solução do sistema S' seja solução do sistema S , ela tem que verificar a equação (3), ou seja, se substituirmos, no lado esquerdo da equação (3), λ e μ pelas expressões anteriores, obtemos uma *igualdade*:

$$n_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & l_2 \\ y-y_0 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} + n_2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} l_1 & x-x_0 \\ m_1 & y-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} = z - z_0$$

Multiplicamos a equação pelo denominador comum às duas frações:

$$n_1 \cdot \begin{vmatrix} x-x_0 & l_2 \\ y-y_0 & m_2 \end{vmatrix} + n_2 \cdot \begin{vmatrix} l_1 & x-x_0 \\ m_1 & y-y_0 \end{vmatrix} = (z-z_0) \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}$$

Desenvolvemos os determinantes:

$$n_1 \cdot [(x-x_0) \cdot m_2 - (y-y_0) \cdot l_2] + n_2 \cdot [(y-y_0) \cdot l_1 - (x-x_0) \cdot m_1] = (z-z_0) \cdot (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1)$$

Distribuímos n_1 e n_2 :

$$(x-x_0) \cdot n_1 \cdot m_2 - (y-y_0) \cdot n_1 \cdot l_2 + (y-y_0) \cdot n_2 \cdot l_1 - (x-x_0) \cdot n_2 \cdot m_1 = (z-z_0) \cdot (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1)$$

Reagrupamos:

$$(x-x_0) \cdot (n_1 \cdot m_2 - n_2 \cdot m_1) + (y-y_0) \cdot (n_2 \cdot l_1 - n_1 \cdot l_2) = (z-z_0) \cdot (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1)$$

Passamos o termo do lado direito da equação para o lado esquerdo e multiplicamos a equação por -1 . Temos:

$$-(x-x_0) \cdot (n_1 \cdot m_2 - n_2 \cdot m_1) - (y-y_0) \cdot (n_2 \cdot l_1 - n_1 \cdot l_2) + (z-z_0) \cdot (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1) = 0$$

Trocamos a ordem dos fatores em cada uma das parcelas:

$$-(n_1 \cdot m_2 - n_2 \cdot m_1) \cdot (x-x_0) - (n_2 \cdot l_1 - n_1 \cdot l_2) \cdot (y-y_0) + (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1) \cdot (z-z_0) = 0$$

Nas duas primeiras parcelas, introduzimos os sinais negativos dentro dos parênteses dos fatores à esquerda, mudando os sinais dos termos:

$$(n_2 \cdot m_1 - n_1 \cdot m_2) \cdot (x-x_0) + (n_1 \cdot l_2 - n_2 \cdot l_1) \cdot (y-y_0) + (l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1) \cdot (z-z_0) = 0$$

Mas:

$$(n_2 \cdot m_1 - n_1 \cdot m_2) = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, (n_1 \cdot l_2 - n_2 \cdot l_1) = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$(l_1 \cdot m_2 - l_2 \cdot m_1) = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$$

Substituímos na equação anterior:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot (x-x_0) + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \cdot (y-y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \cdot (z-z_0) = 0(*)$$

(Ver Observação 4.)

Distribuímos os determinantes pelas diferenças nos parênteses e agrupamos convenientemente os termos que contêm as variáveis x, y, z e os termos que só contêm constantes, obtendo:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \cdot z + \left(-\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot x_0 - \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \cdot y_0 - \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \cdot z_0 \right) = 0$$

Designamos os determinantes que estão multiplicados pelas variáveis x, y, z respectivamente por a, b, c ; e o termo independente, por d .

Substituindo na equação, temos: $ax + by + cz + d = 0$ (omitimos, em cada parcela, o sinal do produto)

Essa equação é denominada *equação geral do plano π* .

Observações:

1. a, b, c, d representam constantes reais, denominadas *coeficientes* do plano π .
2. x, y, z representam as coordenadas de um ponto *qualquer* $P(x, y, z)$ *pertencente ao plano π* .
3. Um ponto *dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pertence ao plano π se e somente se as suas coordenadas verificam a equação geral do plano π , isto é, se no lado esquerdo da equação geral substituímos as variáveis x, y, z respectivamente por x_1, y_1, z_1 e fazemos os cálculos, obtendo **zero** (0).
4. Essa equação (*) (e, portanto, a equação geral do plano π) é equivalente à equação:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Para verificar isso, basta calcular o determinante com a *regra de Laplace*, segundo a primeira linha (mãos à obra, leitor!)

Esclarecimento:

Pela regra de Laplace, o segundo termo da soma seria:

$$-\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0)$$

Mas, conforme a Propriedade 1b, citada no Preâmbulo à Seção A3.8, o determinante muda de sinal se permutamos duas colunas (ou duas linhas) contíguas. Disso segue que:

$$-\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) = +\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0)$$

O lado direito dessa igualdade é o que consta como o segundo termo da soma, na equação (1). Nos nossos cálculos, vamos trabalhar sempre com esse termo (com o sinal +), por uma questão de simplicidade.

Na prática, vamos utilizar a equação dada na Observação 4, para obtermos a equação geral do plano π .

EXEMPLOS

Observação: No que segue, x, y, z representam as coordenadas de um ponto *qualquer* $P(x, y, z)$ *pertencente ao plano π* .

1. Ache a equação geral do plano π que passa pelo ponto $P_0(3, 1, 2)$ e é paralelo aos vetores $\mathbf{u} = (2, 5, 3)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$.

Solução

Temos:

Ponto-base: $P_0(3, 1, 2)$

Vetores diretores: $\mathbf{u} = (2, 5, 3)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 4)$

Conforme dissemos, vamos achar a equação geral usando a fórmula do determinante:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Substituindo os termos que representam constantes pelos valores dados:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Regra de Laplace – primeira linha:

$$(5 \cdot 4 - 3 \cdot 2) \cdot (x-3) + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4) \cdot (y-1) + (2 \cdot 2 - 5 \cdot 1) \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (20 - 6) \cdot (x-3) + (3 - 8) \cdot (y-1) + (4 - 5) \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 \cdot (x-3) - 5 \cdot (y-1) - (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x - 42 - 5y + 5 - z + 2 = 0 \Rightarrow \pi: 14x - 5y - z - 35 = 0$$

2. Ache a equação geral do plano π que passa pelos pontos $A(1, -1, 2)$, $B(3, 0, 4)$, $C(2, 3, 1)$ (Figura A3.20)

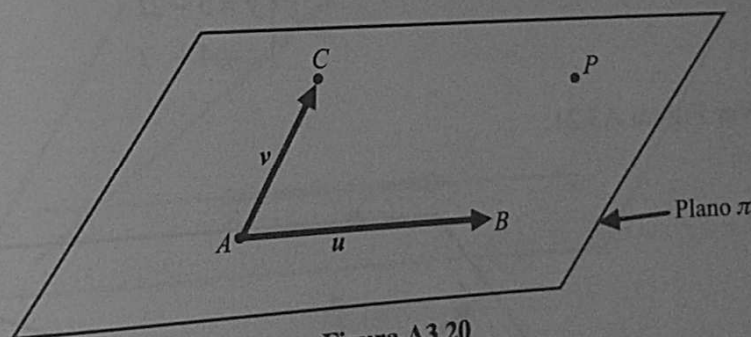


Figura A3.20

$A(1, -1, 2)$: Ponto-base

$\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (B - A) = (3 - 1, 0 - (-1), 4 - 2) = (2, 1, 2)$: Vetor diretor

$\mathbf{v} = \mathbf{AC} = (C - A) = (2 - 1, 3 - (-1), 1 - 2) = (1, 4, -1)$: Vetor diretor

Equação geral – fórmula do determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Regra de Laplace – primeira linha:

$$\Rightarrow (1 \cdot (-1) - (2 \cdot 4)) \cdot (x-1) + (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) \cdot (y+1) + (2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1 - 8) \cdot (x-1) + (2 + 2) \cdot (y+1) + (8 - 1) \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y+1) + 7 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x + 9 + 4y + 4 + 7z - 14 = 0 \Rightarrow \pi: -9x + 4y + 7z - 1 = 0$$

3. Dada a equação geral do plano π : $2x - 3y + z - 6 = 0$, verifique quais pontos dados pertencem (ou não) a esse plano:

a. $A(0, 0, 6)$ b. $B(3, -2, -6)$ c. $C(-1, 5, 7)$

Solução

Conforme a Observação 3 – Equação Geral do Plano –, um ponto dado pertence ao plano π se e somente se as suas coordenadas verificam a equação geral do plano, isto é, se no lado esquerdo da equação geral substituirmos as variáveis x, y, z pelas correspondentes coordenadas do ponto e fazemos os cálculos, obtemos zero (0). Então, vamos aos pontos:

- a. $A(0, 0, 6) \rightarrow$ no lado esquerdo da equação geral:

$$2x - 3y + z - 6 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 - 6 = 0 - 0 + 6 - 6 = 0 \Rightarrow A \in \text{plano } \pi$$

- b. $B(3, -2, -6) \rightarrow$ no lado esquerdo da equação geral:

$$2x - 3y + z - 6 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + (-6) - 6 = 6 + 6 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0 \Rightarrow B \in \text{plano } \pi$$

- c. $C(-1, 5, 7) \rightarrow$ no lado esquerdo da equação geral:

$$2x - 3y + z - 6 = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 + 7 - 6 = -2 - 15 + 7 - 6 = -23 + 7 = -16 \neq 0 \Rightarrow C \notin \text{plano } \pi.$$

4. Ache a equação geral do plano π que passa por $A(2, 3, -1)$ e contém a reta

$$r \begin{cases} x = 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Ver Figura A3.21.

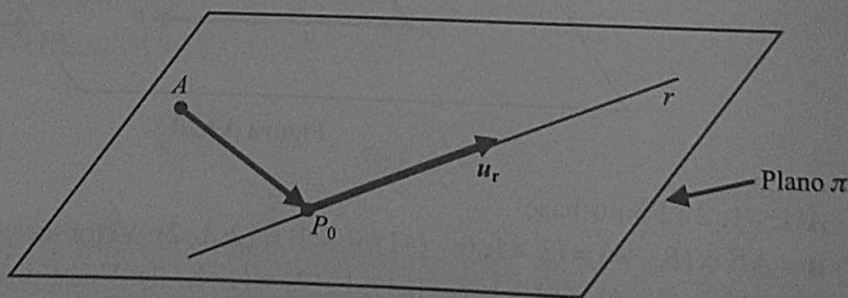


Figura A3.21

Solução

Reta r :

Ponto-base: $P_0(0, 5, 4)$

Vetor diretor: $\mathbf{u}_r = (3, -2, 1)$

Plano π :

Ponto-base: $A(2, 3, -1)$

Vetores diretores: $\mathbf{u} = \overrightarrow{AP_0} = (P_0 - A) = (-2, 2, 5)$

$\mathbf{v} = \mathbf{u}_r = (3, -2, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Regra de Laplace – primeira linha:

$$\begin{aligned} & (2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2)) \cdot (x-2) + (5 \cdot 3 - (-2) \cdot 1) \cdot (y-3) + ((-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow (2 + 10) \cdot (x-2) + (15 + 2) \cdot (y-3) + (4 - 6) \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 12 \cdot (x-2) + 17 \cdot (y-3) - 2 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 12x - 24 + 17y - 51 - 2z - 2 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \pi: 12x + 17y - 2z - 77 = 0 \end{aligned}$$

5. Ache a equação geral do plano π que contém as retas concorrentes:

$$r \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Ver Figura A3.22.

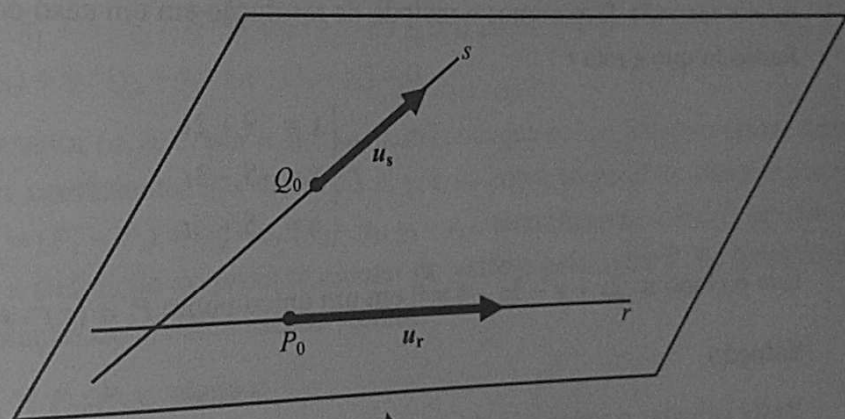


Figura A3.22

Solução

Reta r :

Ponto-base: $P_0(1, 2, 1)$

Vetor diretor: $\mathbf{u}_r = (2, 2, 1)$

Reta s :

Ponto-base: $Q_0(4, 7, 2)$

Vetor diretor: $\mathbf{u}_s = (1, 3, 0)$

Ponto-base do plano π : P_0 ou Q_0

Escolhemos $P_0(1, 2, 1)$

Vetores diretores do plano π : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s = (1, 3, 0)$

Temos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Regra de Laplace – primeira linha:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 0 - 1 \cdot 3) \cdot (x-1) + (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) \cdot (y-2) + (2 \cdot 3 - 2 \cdot 1) \cdot (z-1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (0-3) \cdot (x-1) + (1-0) \cdot (y-2) + (6-2) \cdot (z-1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow -3x + 3 + y - 2 + 4z - 4 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi: -3x + y + 4z - 3 = 0 \end{aligned}$$

6. Um problema básico: achar o ponto em que uma reta fura um plano (ou, em outras palavras, o ponto de intersecção entre uma reta e um plano).

Observação: A rigor, dados um plano π e uma reta r , temos três possibilidades a considerar:

- (1) a reta é paralela ao plano: nesse caso, não o intercepta;
- (2) a reta está contida no plano: nesse caso, qualquer ponto dela pertence ao plano;
- (3) a reta fura o plano em um único ponto.

A discussão dos casos (1) e (2) extrapola o escopo deste Apêndice, de modo que só abordaremos o caso (3). Exporemos o método de resolução em um caso concreto:

Sabendo que a reta r

$$r \begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -5 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

fura o plano $\pi: 2x + y - 3z - 4 = 0$ em um único ponto $P_i = \{r \cap \pi\}$, determine P_i .

Solução

Basta calcular o valor numérico do parâmetro t , para o qual o ponto P da reta r pertence ao plano π . Lembrando que um ponto pertence ao plano π se e somente se as suas coordenadas verificam a equação geral do plano, temos:

$$P(x, y, z) \in \text{reta } r \Leftrightarrow P = P(t) = P(9 + 2t, -5 - 3t, 5 + t)$$

$P = P(t) \in \text{plano } \pi \Leftrightarrow$ Substituindo no lado esquerdo da equação geral do plano as variáveis x, y, z pelas correspondentes coordenadas do ponto P , obtemos zero $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(9 + 2t) + (-5 - 3t) - 3(5 + t) - 4 = 0.$$

Calculando o valor de t :

$$\begin{aligned} 18 + 4t - 5 - 3t - 15 - 3t - 4 &= 0 \Leftrightarrow 4t - 6t + 18 - 24 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2t - 6 &= 0 \Leftrightarrow -2t = 6 \Leftrightarrow t = -3. \end{aligned}$$

Substituindo $t = -3$ em $P = P(t) = P(9 + 2t, -5 - 3t, 5 + t)$:

$$\begin{aligned} P(-3) &= P(9 + 2 \cdot (-3), -5 - 3 \cdot (-3), 5 + (-3)) = \\ &= P(9 - 6, -5 + 9, 5 - 3) = P(3, 4, 2). \end{aligned}$$

Portanto, $P_i(3, 4, 2)$. ■

Consideremos um plano π , com equação geral:

$ax + by + cz + d = 0$, e sejam $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dois pontos quaisquer pertencentes ao plano π . Neste caso, dizemos que o vetor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ é paralelo ao plano π . (Ver Figura A3.23.)

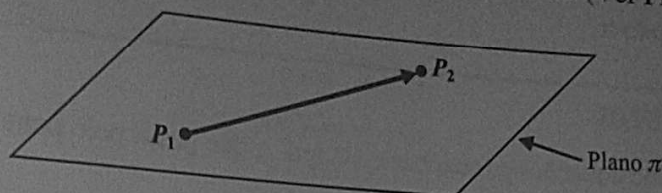


Figura A3.23

Como P_1 e P_2 pertencem ao plano π , suas coordenadas verificam a equação geral do plano, ou seja:

$$a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot z_2 + d = 0 \quad (2)$$

Fazendo (2) - (1), temos

$$\begin{aligned} (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot z_2 + d) - (a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d) &= 0 - 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot z_2 + d - a \cdot x_1 - b \cdot y_1 - c \cdot z_1 - d &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot x_2 - a \cdot x_1 + b \cdot y_2 - b \cdot y_1 + c \cdot z_2 - c \cdot z_1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) + c \cdot (z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Denotando o vetor (a, b, c) por $\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (a, b, c)$ [note que a, b, c , são constantes numéricas, respectivamente, os coeficientes das variáveis x, y, z na equação geral do plano π], e observando que o vetor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (P_2 - P_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, identificamos o lado esquerdo da equação (3) como sendo a definição do produto escalar do vetor $\mathbf{n}$ pelo vetor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Reescrevendo a equação (3) com a notação do produto escalar, temos:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0, \forall P_1, P_2 \in \text{plano } \pi$$

Mas, pela Propriedade 6 do produto escalar, temos:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$$

E concluímos que:

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \forall P_1, P_2 \in \text{plano } \pi$$

Também podemos dizer: o vetor $\mathbf{n}$ é ortogonal a qualquer vetor que seja paralelo ao plano π . O vetor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ é denominado **vetor normal** ao plano π (ver Figura A3.24).

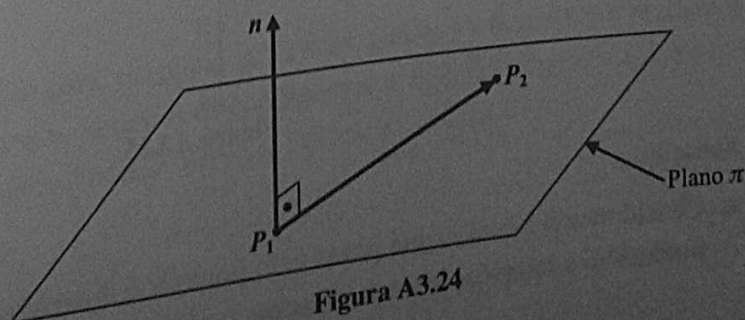


Figura A3.24

Como veremos nos exemplos, o vetor normal tem muitas aplicações no estudo do plano e simplifica a solução de vários problemas.

Observação: Do exposto anteriormente, segue uma conclusão que será muito útil nos exercícios concernentes a retas e planos: *o vetor normal é paralelo a qualquer reta que seja perpendicular ao plano π .*

EXEMPLOS

1. Ache equações paramétricas da reta r , que passa pelo ponto $A(-2, 3, 5)$, e é perpendicular ao plano $\pi: x - 4y + 7z + 2 = 0$

Solução

Conforme a observação anterior, o vetor normal ao plano π é paralelo à reta r , e portanto é um vetor diretor da reta:

$\mathbf{u}_r = \mathbf{n} = (1, -4, 7)$. Tomando $A(-2, 3, 5)$ como ponto-base da reta, temos:

$$r \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = 5 + 7t \end{cases}$$

2. Dados o ponto $B(1, -2, 3)$ e o plano $\pi: x + 2y - z - 6 = 0$, pede-se:
- O ponto B' , projeção ortogonal do ponto B sobre o plano π ("pé da perpendicular");
 - O ponto B'' , simétrico do ponto B em relação ao plano π (ver Figura A3.25).

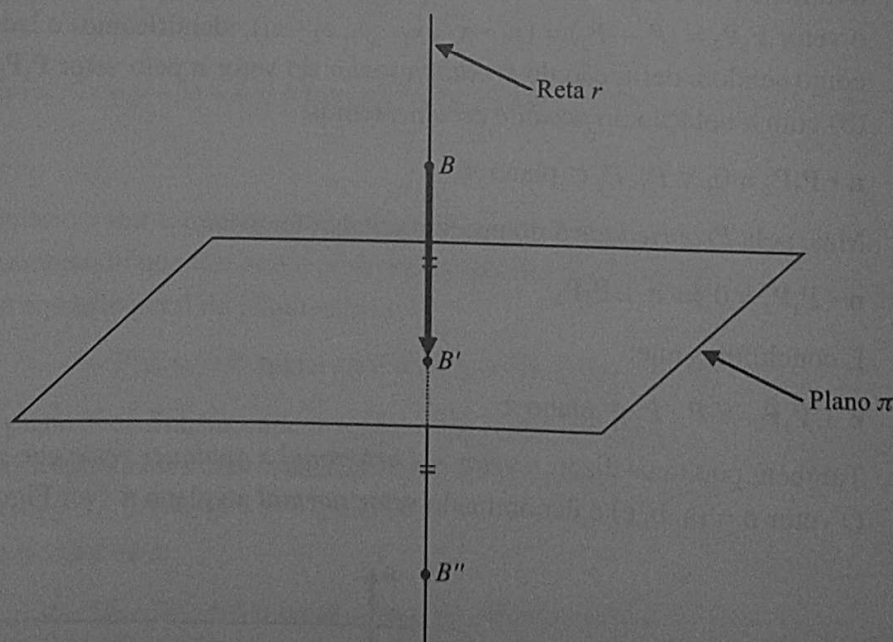


Figura A3.25

Solução

- a. Considerando a reta r , que passa pelo ponto B e é perpendicular ao plano π , temos que o ponto B' é a intersecção desta reta com o plano π .

Conforme o Exemplo 1, um vetor diretor da reta r é o vetor normal ao plano π , e um ponto-base é o ponto B :

Reta r :

Ponto-base: $B(1, -2, 3)$

Vetor diretor: $\mathbf{u}_r = \mathbf{n} = (1, 2, -1)$

Equações paramétricas:

$$r \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Para determinar $B' = \{r \cap \pi\}$, usaremos o método descrito no Exemplo 6, Seção A3.8.5. Na equação geral do plano π , substituímos as variáveis x, y, z pelas correspondentes equações paramétricas da reta r :

$$(1 + t) + 2 \cdot (-2 + 2t) - (3 - t) - 6 = 0$$

A solução da equação é o valor de t que fornece o ponto B' .

Resolvendo, achamos $t = 2$. Substituindo $t = 2$ nas equações paramétricas da reta r , determinamos B' : $B'(3, 2, 1)$.

b. B' é o ponto médio do segmento BB'' , logo:

$$\begin{aligned} B'' &= B + 2\mathbf{BB}' = B + 2(B' - B) = (1, -2, 3) + 2(2, 4, -2) = \\ &= (1, -2, 3) + (4, 8, -4) = (5, 6, -1) \Rightarrow B''(5, 6, -1). \end{aligned}$$

3. Vamos resolver o Exemplo 2 da Seção A3.8.5 usando o vetor normal

“Ache a equação geral do plano π , que passa pelos pontos $A(1, -1, 2), B(3, 0, 4), C(2, 3, 1)$ ”.

(Ver Figura A3.26.)

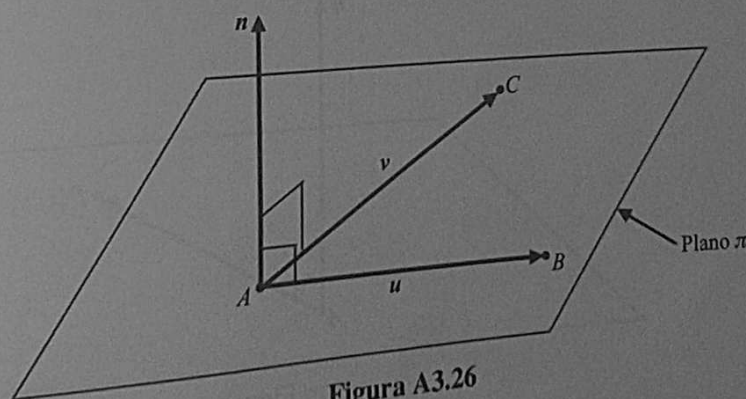


Figura A3.26

Solução

Sendo a equação geral do plano π : $ax + by + cz + d = 0$, e o vetor normal: $\mathbf{n} = (a, b, c)$, então, se determinamos $\mathbf{n}$, já temos os coeficientes a, b, c . Ora, como $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, podemos escrever: $\mathbf{n} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (ver Produto Vetorial Definição, Seção A3.5.1).

Calculando:

$$\mathbf{u} = \mathbf{AB} = (B - A) = (2, 1, 2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{AC} = (C - A) = (1, 4, -1)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} =$$

$$= (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \mathbf{i} - (2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1) \mathbf{j} + (2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) \mathbf{k} =$$

$$= (-1 - 8) \mathbf{i} - (-2 - 2) \mathbf{j} + (8 - 1) \mathbf{k} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{n} = (-9, 4, 7)$$

Então: $a = -9$, $b = 4$, $c = 7$. Substituindo na equação geral do plano π : $-9x + 4y + 7z + d = 0$. Para determinar d , basta substituir, nessa equação, as variáveis x, y, z pelas coordenadas correspondentes de um dos três pontos A, B, C , pois, como estes pontos pertencem ao plano π , suas coordenadas verificam a equação geral do plano.

Escolhendo, por exemplo, o ponto $A(1, -1, 2)$:

$$-9 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow -9 - 4 + 14 + d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d - 13 + 14 = 0 \Rightarrow d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1. \text{ Substituindo na equação geral, obtemos } \pi: -9x + 4y + 7z - 1 = 0.$$

Observação 1: Como d representa uma constante numérica, o seu valor calculado deve ser o mesmo ($d = -1$) se usarmos os pontos B ou C . Só para testar, vamos fazer os cálculos:

$B(3, 0, 4)$ na equação geral:

$$-9 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow -27 + 0 + 28 + d = 0 \Rightarrow d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1$$

$C(2, 3, 1)$ na equação geral:

$$-9 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -18 + 12 + 7 + d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18 + 19 + d = 0 \Rightarrow d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1.$$

Observação 2: Tendo calculado o vetor normal, como anteriormente, podemos achar a equação geral do plano π usando o *Produto Escalar* (ver Figura A3.27).

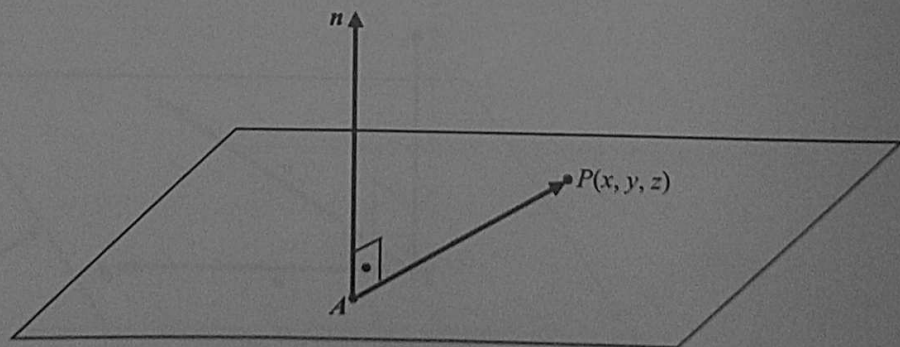


Figura A3.27

De fato, sendo $P(x, y, z)$ um ponto qualquer pertencente ao plano π , e escolhendo, por exemplo, o ponto dado $A(1, -1, 2)$ do plano, temos:

$$\mathbf{n} = (-9, 4, 7) \text{ (já calculado)}$$

$$\mathbf{AP} = (P - A) = (x - 1, y + 1, z - 2)$$

$$P(x, y, z) \in \text{plano } \pi \Leftrightarrow \mathbf{n} \perp \mathbf{AP}$$

Pela *Propriedade 6* do Produto Escalar:

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{AP} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{AP} = 0$$

$$\text{Logo: } P(x, y, z) \in \text{plano } \pi \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{AP} = 0.$$

Fazendo os cálculos:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{AP} = 0 \Leftrightarrow (-9, 4, 7) \cdot (x-1, y+1, z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y+1) + 7 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x + 9 + 4y + 4 + 7z - 14 = 0 \Leftrightarrow -9x + 4y + 7z + 13 - 14 = 0 \Leftrightarrow -9x + 4y + 7z - 1 = 0.$$

Portanto:

$$\pi: -9x + 4y + 7z - 1 = 0$$

4. O ponto $B(3, -4, 5)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto $A(6, 1, 7)$ sobre o plano π . Ache a equação geral do plano π (Figura A3.28).

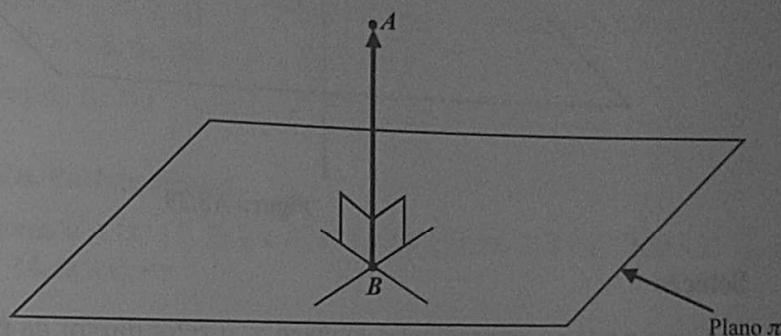


Figura A3.28

Solução

Vetor normal ao plano π :

$\mathbf{n} = \mathbf{AB}$, ou, $\mathbf{n} = \mathbf{BA}$ (tanto faz).

Escolhendo, por exemplo, $\mathbf{n} = \mathbf{BA}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{BA} = (A - B) = (6 - 3, 1 - (-4), 7 - 5) = (6 - 3, 1 + 4, 7 - 5) = (3, 5, 2) \Rightarrow \mathbf{n} = (3, 5, 2)$$

Então: $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$, e a equação geral do plano π é:

$$\pi: 3x + 5y + 2z + d = 0$$

Cálculo do coeficiente d :

Como $B(3, -4, 5)$ pertence ao plano π , substituímos, na equação geral do plano, as variáveis x , y , z , respectivamente, por 3 , -4 , 5 , e calculamos o valor do coeficiente d :

$$3 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow 9 - 20 + 10 + d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d + 19 - 20 = 0 \Rightarrow d - 1 = 0 \Rightarrow d = 1.$$

Portanto:

$$\pi: 3x + 5y + 2z + 1 = 0$$

5. Sabendo que a reta

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

é perpendicular a um plano π e que o ponto $A(-1, 2, 6)$ pertence a esse plano, pede-se:

- a. Ache a equação geral do plano π .
 b. Ache o ponto P_i , em que a reta r fura o plano π (Figura A3.29).

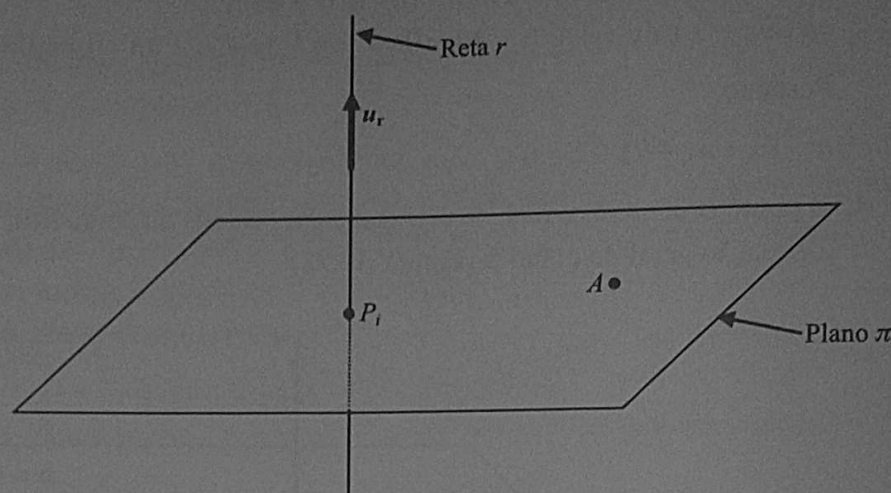


Figura A3.29

Solução

- a. Como a reta r é perpendicular ao plano π , o vetor diretor da reta é normal ao plano π : $\mathbf{u}_r = \mathbf{n}$. Sendo $\mathbf{u}_r = (1, 2, -1)$, então $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$, e os coeficientes a, b, c na equação geral do plano são: $a = 1, b = 2, c = -1$. Logo:

$$\pi: x + 2y - z + d = 0$$

$A(-1, 2, 6) \in \text{plano } \pi \Rightarrow$ substituindo, na equação anterior, as variáveis x, y, z pelas correspondentes coordenadas de A , calculamos o valor do coeficiente d :

$$-1 + 2 \cdot 2 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \pi: x + 2y - z + 3 = 0$$

- b. Substituindo, na equação geral do plano π , as variáveis x, y, z , pelas correspondentes equações paramétricas da reta r , calculamos o valor do parâmetro t que fornece o ponto P_i :

$$t + 2 \cdot (1 + 2t) - (3 - t) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t + 2 + 4t - 3 + t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

Substituindo, nas equações paramétricas da reta r , t por $-\frac{1}{3}$, obtemos o ponto $P_i: P_i\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

A3.9 Exercícios propostos**A. Vetores**

I. Adição de vetores. Multiplicação de um número real por um vetor. Vetores paralelos.

1. Dados os vetores $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$, calcule:

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ b. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ c. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ d. $5\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

Respostas: a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (5, 0, -2)$ b. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, -2, 2)$

c. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (13, 1, -6)$ d. $5\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (4, -7, 4)$

2. Determine os vetores u e v , sabendo que:

(i) $u + 2v = (0, 4, 13)$ (ii) $u - v = (9, 1, 1)$

Respostas: $u = (6, 2, 5)$, $v = (-3, 1, 4)$

3. Determine o vetor u , sabendo que u tem a mesma direção e sentido que o vetor $v = (6, -2, 3)$, e $\|u\| = 35$.

Resposta: $u = (30, -10, 15)$

4. Calcule a e b , para que os vetores $u = (2a + 3b, a, 9)$ e $v = (3, 2, 3)$ sejam paralelos.

Respostas: $a = 6$, $b = -1$

5. Determine o vetor w , sabendo que

(i) $w \parallel u$, sendo $u = (-3, 2, 4)$

(ii) $w + (1, 0, -2) = (-8, 6, 10)$

Resposta: $w = (-9, 6, 12)$

II. Produto Escalar. Produto Vetorial.

1. Dados os vetores $u = (3, -1, 2)$ e $v = (4, 1, -2)$, calcule: a. $u \cdot v$ b. $v \cdot u$ c. $u \wedge v$ d. $v \wedge u$ e. $(u \wedge v) \cdot u$ f. $(u \wedge v) \cdot v$

Respostas:

a. $u \cdot v = 7$

b. $v \cdot u = 7$

c. $u \wedge v = (0, 14, 7)$

d. $v \wedge u = (0, -14, -7)$

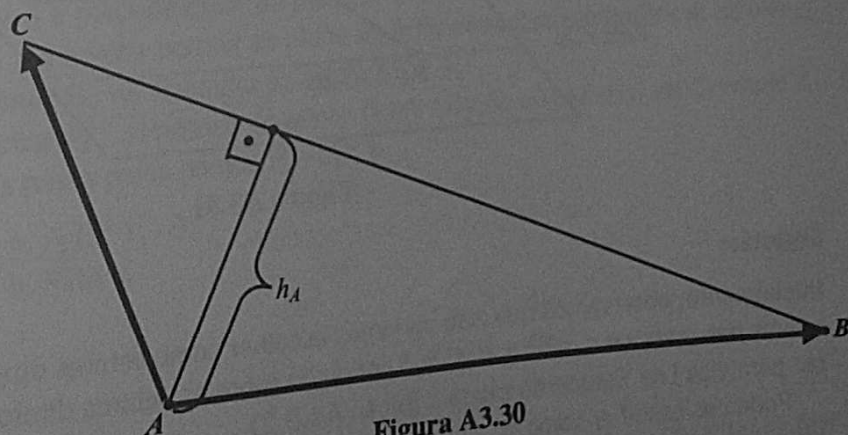
e. $(u \wedge v) \cdot u = 0$

f. $(u \wedge v) \cdot v = 0$

2. Dados os vetores $AB = (1, 0, 1)$ e $AC = (1, 1, 0)$, calcule:

a. $AB \wedge AC$ b. A área A do triângulo ABC .

c. O comprimento h_A da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC (Figura A3.30).



Resposta: a. $AB \wedge AC = (-1, 1, 1)$

b. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $h_A = \sqrt{\frac{3}{2}}$

3. Determine o vetor $w = (l, m, n)$, que satisfaz as condições:

a. $w \cdot u = 4$, sendo $u = (1, 2, 1)$

b. $w \wedge v = (5, -7, -13)$, sendo $v = (1, -3, 2)$

Resposta: $w = (5, -2, 3)$

4. Determine o vetor z , que satisfaz as condições:

a. $z \perp u$, sendo $u = (0, -1, 1)$

b. $z \perp v$, sendo $v = (1, -5, 0)$

$\|z\| = 12\sqrt{3}$

c. z tem as três coordenadas maiores que zero.

Resposta: $z = (20, 4, 4)$

5. Determine o vetor $x = (l, m, n)$, que satisfaz:

a. $x \cdot u = 3$, sendo $u = (1, 0, -1)$

b. $x \cdot v = -2$, sendo $v = (1, 2, 0)$

c. $x \wedge w = (-7, -6, 6)$, sendo $w = (0, 1, 1)$

Resposta: $x = (6, -4, 3)$

B. Geometria analítica no espaço

Estudo da Reta e estudo do plano

1. Ache a equação geral do plano π que contém as retas paralelas

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 4\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases}$$

(Figura A3.31).

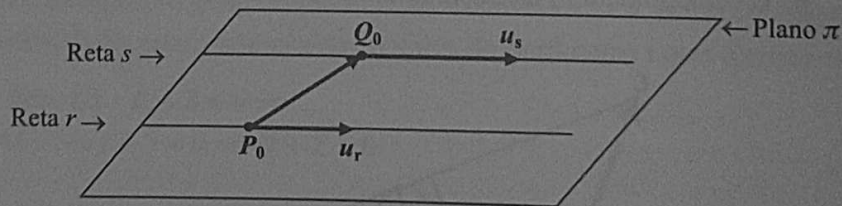


Figura A3.31

Sugestão:

Inicialmente, observamos que *não* podemos escolher como vetores diretores do plano π os vetores diretores das retas r e s , pois $u_r \parallel u_s$, e a condição sobre os vetores diretores do plano é que *não* podem ser paralelos (ver Estudo do plano – Seção A3.8.2).

Podemos escolher como ponto-base do plano π o ponto $P_0(0, 1, -1)$ da reta r , e como um vetor diretor do plano π , por exemplo, $u = u_r = (1, 2, 3)$.

O outro vetor diretor do plano pode ser $v = P_0Q_0$:

$$v = P_0Q_0 = (Q_0 - P_0) = (1, 4, 3) \text{ não é paralelo a } u_r.$$

Para achar a equação geral do plano π , basta aplicar um dos métodos expostos nos exemplos (ver Exemplo 1 – Seção A3.8.5, e Exemplo 3 – Seção A3.8.6).

Respostas: $\pi: -6x + 2z + 2 = 0$, ou $\pi: 3x - z - 1 = 0$

2. Sabendo que a reta

$$r \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

intercepta o plano $\pi: 2x - y + z + 4 = 0$, pede-se:

- Ache o ponto de intersecção P_i .
- Ache equações paramétricas da reta s , simétrica da reta r em relação ao plano π . (Figura A3.32.)

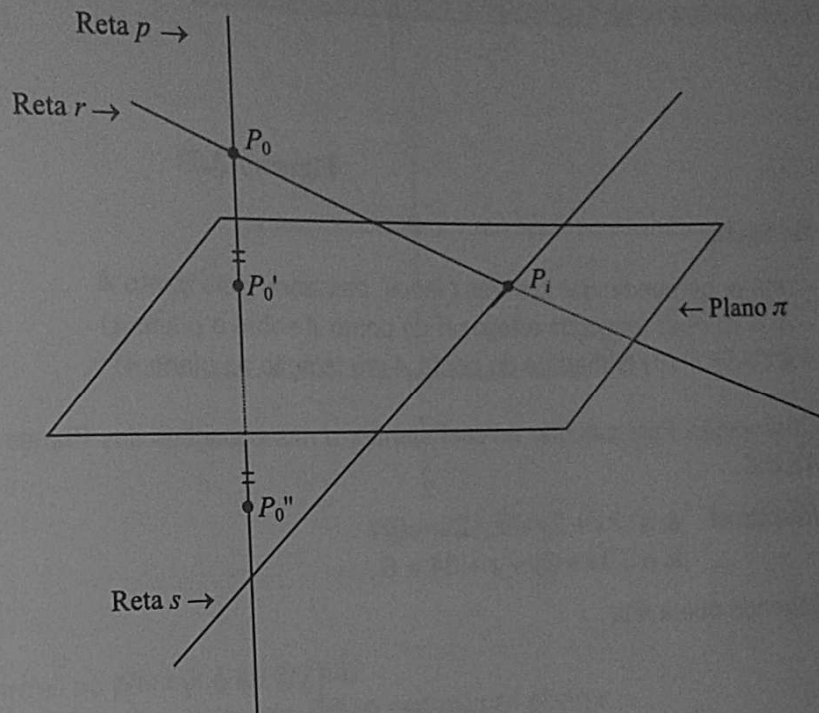


Figura A3.32

Sugestão:

- Para achar P_i , ver Exemplo 6, Seção A3.8.4
- A reta p é a perpendicular ao plano π que passa pelo ponto-base da reta r (P_0). Um vetor diretor da reta p é o vetor normal ao plano π . Ache equações paramétricas da reta p .
- Para achar P_0' , ver Exemplo 6, Seção A3.8.4
- Para achar P_0'' , simétrico do ponto P_0 em relação ao plano π , ver Exemplo 2 – Seção A3.8.6
- A reta s passa pelos pontos P_i e P_0'' .

Resposta: a. $P_i(3, 1, -9)$
b. Reta s :

$$s \begin{cases} x = 3 - 4\mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -9 + 3\mu \end{cases}$$

3. Dados o plano $\pi: 3x + 2y - z + 6 = 0$ e o ponto $A(8, 1, 4)$, não-pertencente ao plano, pede-se:
- A equação geral do plano α , que passa pelo ponto A e é paralelo ao plano π .
 - A equação geral do plano α' , simétrico do plano α em relação ao plano π .

Sugestão:

- O vetor normal ao plano π é o mesmo que o vetor normal aos planos α e α' .
- O problema 1) e a Figura A3.33 indicam a solução.

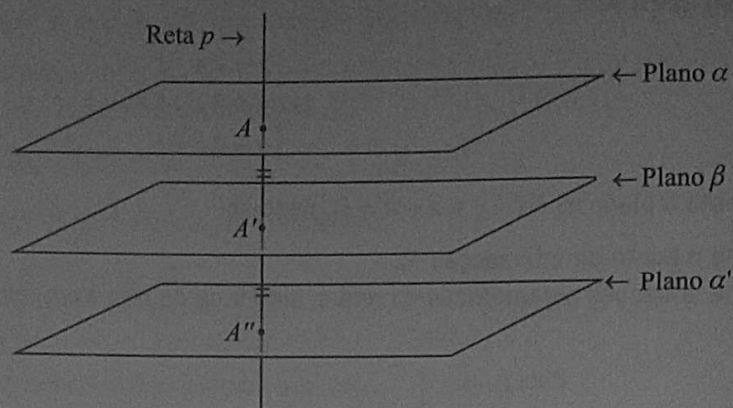


Figura A3.33

Na figura:

- reta p : perpendicular aos três planos, passando pelo ponto A
- $A' = (p \cap \pi)$ (projeção ortogonal do ponto A sobre o plano π)
- $A'' = (p \cap \alpha')$ (simétrico do ponto A em relação ao plano π)

Observação: Para calcular os coeficientes d nas equações dos Planos α e α' , ver Exemplo 3, Seção A3.8.6.

Respostas: a. $\alpha: 3x + 2y - z - 22 = 0$
 b. $\alpha': 3x + 2y - z + 34 = 0$

4. Sabendo que a reta

$$r \begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

é paralela ao plano $\pi: x - 4y - 3z + 1 = 0$, determine equações paramétricas da reta s , simétrica da reta r em relação ao plano π .

Sugestão:

Se o leitor resolveu os problemas 1) e 2), basta observar pensantemente a Figura A3.34 e terá elementos para resolver o problema 3.

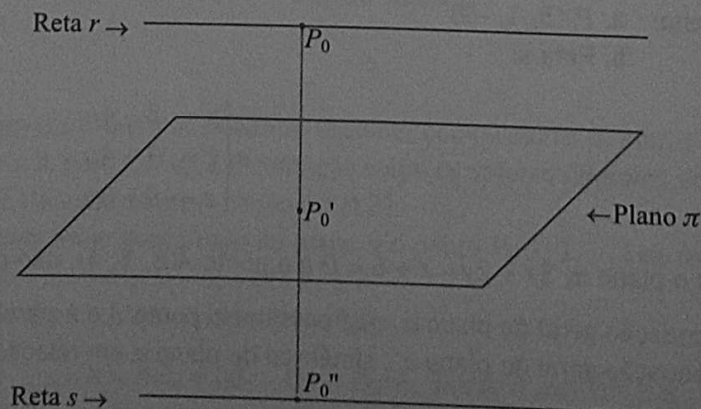


Figura A3.34

Sugestão:

Vetor diretor da reta s = Vetor diretor da reta r

Ponto-base da reta $s = P_0''$ (simétrico do ponto-base da reta r em relação ao plano π)

$$\text{Resposta: } s \begin{cases} x = -5 + \mu \\ y = -6 - 2\mu \\ z = -2 + 3\mu \end{cases}$$

5. Dados os pontos $A(-5, 2, 3)$ e $B(9, -8, 7)$, ache a equação geral do plano π , que passa pelo ponto médio do segmento de reta AB e é perpendicular à reta determinada pelos pontos A e B (plano mediador) (Figura A3.35).

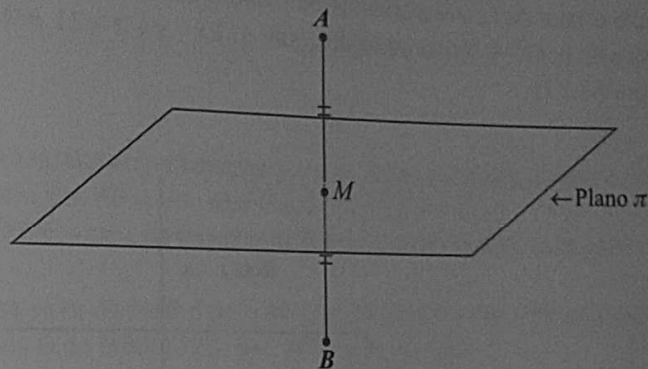


Figura A3.35

Sugestão:

Um vetor normal ao plano π é $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$)

O ponto médio do segmento de reta $AB(M)$ pertence ao plano π
(Ponto médio: ver Seção A3.6.4).

$$\text{Resposta: } \pi: 14x - 10y + 4z - 78 = 0, \text{ ou,} \\ \pi: 7x - 5y + 2z - 39 = 0$$

6. Dada a reta

$$r \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

ache a equação geral do plano π , perpendicular a ela, e que passa pelo ponto A de r correspondente a $t = 2$ (Figura A3.36).

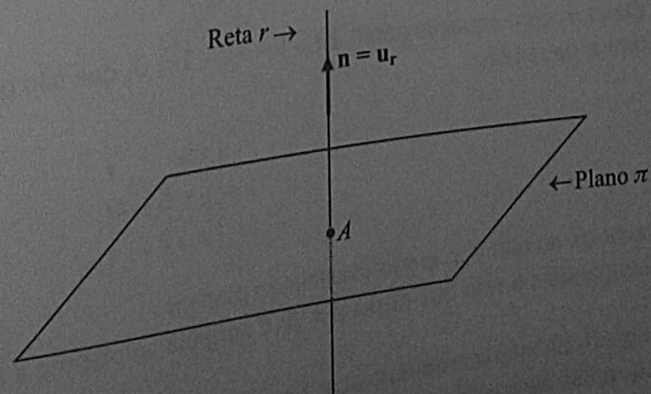


Figura A3.36

Sugestão:

Tome o vetor diretor da reta r como o vetor normal ao plano π :

$\mathbf{n} = \mathbf{u}_r$. Determine A , fazendo $t = 2$ nas equações paramétricas da reta r .

Resposta: $\pi: 4y + 5z - 96 = 0$

7. Dada a reta r :

$$r \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

calcule o valor de t correspondente ao ponto A da reta r , tal que o plano π perpendicular à reta, e que passa pelo ponto A , tenha equação geral: $\pi: 2x - y + z - 21 = 0$ (Figura A3.37)

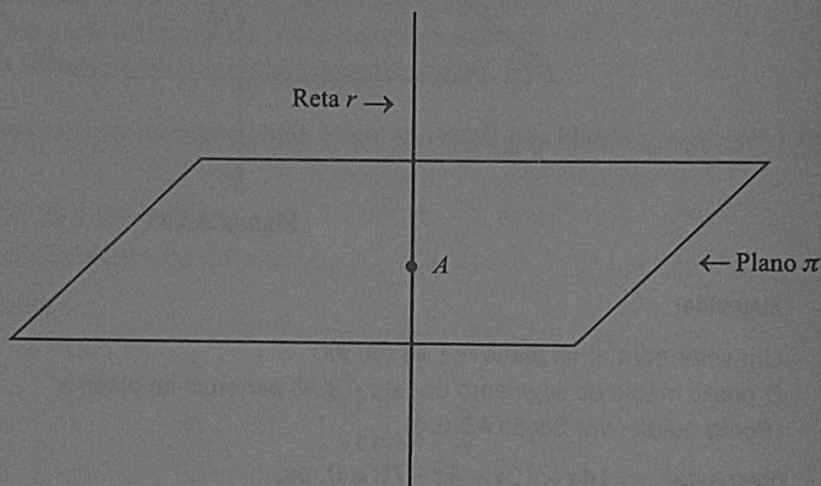


Figura A3.37

Sugestão:

O valor pedido de t é aquele para o qual a reta r fura o plano π (Ponto A) – Compare com o Exercício 6.

Resposta: $t = 4$.

8. Considere:

- O ponto $A(-3, 1, -7)$
- O plano π , com equação geral: $3x + y - 2z - 1 = 0$, que não passa pelo ponto A
- A reta r , dada por:

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 5 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

não contida no plano π , e não paralela ao plano π .

Denominando s a reta que passa por A , é paralela ao plano π e intercepta a reta r , pede-se:

- O ponto de intersecção das retas r e s , $P_1 = (r \cap s)$
- Equações paramétricas da reta s (Figura A3.38).

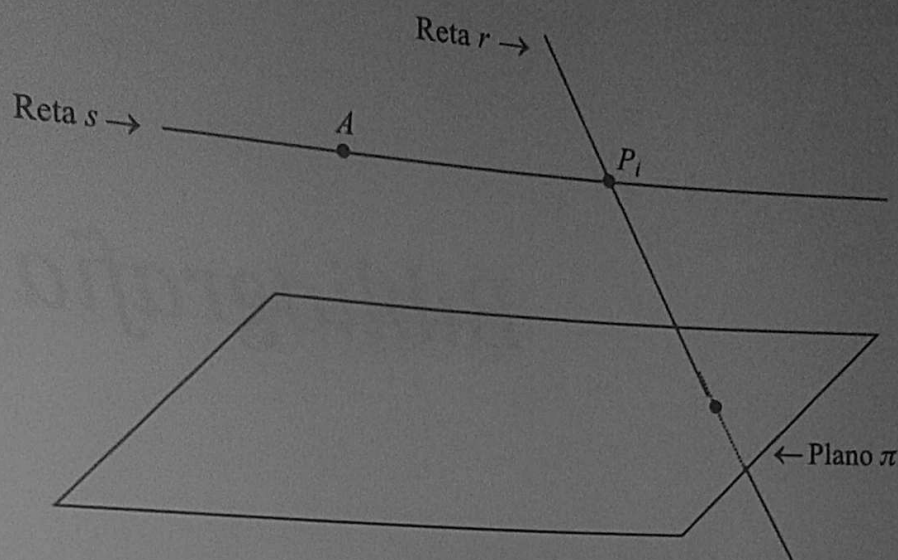


Figura A3.38

Sugestão:

- Se P é um ponto qualquer pertencente à reta r , então podemos escrever: $P(t, 5 + 4t, 2 + t)$.
- O vetor $\mathbf{AP}$ é dado por: $\mathbf{AP} = (P - A) = (t + 3, 4 + 4t, 9 + t)$.
- Para o valor numérico de t tal que $P \equiv P_i$, temos que $\mathbf{AP}_i$ é paralelo ao plano π , pois a reta s é paralela ao plano π .
Então, para esse valor de t : $\mathbf{AP} // \pi \Leftrightarrow \mathbf{AP} \perp \mathbf{n}$, sendo $\mathbf{n}$ o vetor normal ao plano π (Seção A3.8.6).
- Pela Propriedade 6 do Produto Escalar: $\mathbf{AP} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$.
Resolvendo a equação resultante, calcule o valor numérico de t que fornece o ponto P_i .
(i) Ache P_i , substituindo, nas equações paramétricas da reta r , o parâmetro t pelo valor numérico calculado no item (d).
(ii) A reta s passa pelo ponto A , e um vetor diretor dela é $\mathbf{u}_s = \mathbf{AP}_i$.

Respostas: (i) $P_i(1, 9, 3)$

(ii) Reta s :

$$s \begin{cases} x = -3 + 4\lambda \\ y = 1 + 8\lambda \\ z = -7 + 10\lambda \end{cases}$$

Índice

B

- Base
 - canônica, 47
 - de um espaço vetorial, 46

C

- Combinação linear, 40
- Coordenada(s)
 - base ortonormais, 187, 225
 - no espaço, 223
 - norma, 227
 - de um vetor em termos de, 189
 - operações, 189, 228
 - adição, 189, 228
 - multiplicação de um número real por um vetor, 190, 228
 - paralelismo, 190, 228
 - produto escalar, 196
 - produto vetorial, 237

D

- Determinante(s), 9
 - co-fator, 11
 - definição, 12
 - Laplace, 12
- Diagonalização, 83
 - polinômio característico, 83
 - valor próprio, 83
 - vetor próprio, 83
- Dimensão do espaço vetorial, 46

E

- Equação(ões)
 - diferenciais lineares, 117
 - solução da equação, 118
 - de 1.ª ordem, 118
 - de 2.ª ordem, 119
 - linear, 19
- Espaços vetoriais, 32
 - definição, 32

F

- Função, 54

I

- Imagem da transformação linear, 62

L

- Linearmente

- dependente, 44
- independente, 44

M

- Matriz(es), 1, 70
 - adjunta, 14
 - coluna, 1
 - de co-fatores, 14
 - de uma transformação linear, 70
 - diagonalizável, 88
 - identidade, 2
 - iguais, 2
 - invertível, 5
 - linha, 1
 - mudança de base, 79
 - operações, 2
 - adição, 2
 - multiplicação de matrizes, 4
 - multiplicação por escalar (n.º real), 3
 - quadrada, 1
 - retangular, 1
 - semelhantes, 80

N

- Núcleo da transformação linear, 61

O

- Operações
 - com transformações lineares, 66
 - adição, 66
 - composição, 66
 - multiplicação por escalar, 66
- Operador(es)
 - invertíveis, 68
 - linear, 68
 - lineares diferenciais, 112
 - adição, 114
 - composição, 116
 - multiplicação por um número real, 114

P

- Plano, 260
 - equação
 - geral, 263
 - paramétrica, 262
 - vetorial, 261
 - vetor normal, 271
- Ponto médio, 244
- Produto escalar, 194, 232
 - coordenadas de um vetor numa base ortogonal, 197

- definição, 195, 232
- projeção ortogonal, 196
- Produto interno, 92
 - ângulo entre dois vetores, 96
 - base
 - ortogonal, 101
 - ortonormal, 101
 - complemento ortogonal, 106
 - conjuntos ortogonais, 105
 - de vetores, 100
 - coordenadas de um vetor numa base ortogonal, 102
 - definição, 92
 - distância entre dois vetores, 96
 - método de ortogonalização de Gram-Schmidt, 103
 - norma de um vetor, 94
 - unitário, 94
 - vetores ortogonais, 99
- Produto vetorial, 234

R

- Reta(s)
 - equação
 - paramétrica, 204, 246
 - reduzida, 215
 - vetorial, 203, 245
 - ortogonais, 255
 - paralelas, 208, 250
 - perpendiculares, 212, 255

S

- Sistemas lineares, 19
 - resolução, 21
 - Cramer, 21
 - escalonamento, 24
 - sistema homogêneo, 20
- Subespaço vetorial, 34
 - gerado, 41
 - intersecção, 37
 - soma, 35
 - direta, 40

T

- Transformação(ões)
 - linear, 56
 - geométricas em três dimensões, 150
 - composição de transformações, 171
 - rotações sucessivas, 174
 - translações sucessivas, 171
 - escala (homotetia), 167
 - reflexão, 150

6 Índice

sobre o plano xy , 150
sobre o plano xz , 151
sobre o plano yz , 151
rotação, 152
de ângulo α em torno do eixo x , 154
de ângulo α em torno do eixo y , 158
de ângulo α em torno do eixo z , 152
translação, 161

Trigonometria
ângulo, 193
no círculo trigonométrico, 192
no triângulo retângulo, 191

V

Vector(es), 183

norma (ou módulo), 183
nulo, 184
operações, 184
adição, 184
multiplicação de um número real por um
oposto, 184
ortogonais, 186
paralelos, 185

Álgebra Linear para Computação

Esta obra é destinada a alunos de graduação na área de ciências exatas em geral e especialmente aos alunos dos cursos de computação — Ciência da Computação, Sistemas de Informações, Engenharia de Computação e Licenciatura em Computação — que estejam iniciando seus estudos em Álgebra Linear.

O texto é fruto da experiência dos autores em aulas ministradas nos cursos de Engenharia, Matemática, Ciência da Computação e Análise de Sistemas em diferentes instituições de ensino superior, e também das sugestões de professores que utilizaram as notas preliminares desta obra.

Apresentada em linguagem simples, a teoria vem acompanhada de exemplos e exercícios resolvidos. Ao final do texto incluem-se problemas propostos com as respectivas respostas.

Além do conteúdo tradicional de Álgebra Linear, o Apêndice 1 aborda transformações lineares no espaço, de grande aplicação em computação gráfica, e os Apêndices 2 e 3 fazem uma revisão de geometria analítica no plano e no espaço.

Fundamentos de Informática

Fundamentos de Informática é especialmente projetada para os estudantes de computação de nível superior, contempla de modo abrangente os quatro cursos hoje definidos para a área — Ciência da Computação, Sistemas de Informações, Engenharia de Computação e Licenciatura em Computação.

O conteúdo dos livros que integram *Fundamentos de Informática* foi estabelecido com base nas diretrizes curriculares aprovadas pelo Ministério da Educação para a formação na área de computação, sendo, portanto, livros adequados e completos para os cursos que tratam do assunto.